

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

А.И. Савельев, А.А. Ерашов,  
Е.О. Черских, О.А. Шмаков

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ



СПб ФИЦ РАН

Санкт-Петербург, 2025

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
«Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр  
Российской академии наук» (СПб ФИЦ РАН)

---

А.И. Савельев, А.А. Ерашов, Е.О. Черских,  
О.А. Шмаков

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ  
ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ**

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2025

УДК 531.133  
ББК 32.816

**Савельев А.И., Ерашов А.А., Черских Е.О., Шмаков О.А.**  
**Математическое и программное обеспечение решения задач**  
**кинематики манипуляторов.** Учеб.-метод. пособие / СПб ФИЦ  
РАН. СПб., 2025. 80 с.: ил. 23

ISBN 978-5-6052274-3-4

Учебно-методическое пособие способствует освоению базовых знаний в области математического описания кинематических схем манипуляторов, определения их параметров, решения задач кинематики, а также программирования алгоритмов на языке Python. В пособии приводятся основные теоретические сведения, рассматривается методика решения прямой и обратной задач кинематики на примере манипулятора с тремя поступательными сочленениями. Даны рекомендации по разработке программного обеспечения на языке Python для реализации расчета кинематических параметров и визуализации движения манипулятора.

Учебно-методическое пособие адресовано аспирантам, проходящим подготовку по научной специальности 2.3.5. Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей. Пособие может быть использовано при подготовке аспирантов по научной специальности 2.5.4. Роботы, мехатроника и робототехнические системы, а также быть полезным для студентов технических ВУЗов, обучающихся по специальностям 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.06 Мехатроника и робототехника, 27.03.04 Управление в технических системах, и всех читателей, интересующихся современными технологиями систем управления, наземной и промышленной робототехникой, разработкой высокоуровневого программного обеспечения.

Рецензенты:

**Солёный Сергей Валентинович**, к.т.н., доцент, ГУАП  
**Левоневский Дмитрий Константинович**, к.т.н., СПб ФИЦ РАН

*Рекомендовано Ученым советом СПб ФИЦ РАН в качестве  
учебно-методического пособия при подготовке аспирантов по научной  
специальности 2.3.5. Математическое и программное обеспечение  
вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей*

ISBN 978-5-6052274-3-4

© Авторы, 2025  
© СПб ФИЦ РАН, 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ</b> .....	7
<b>1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ</b> .....	9
1.1. Положение материальной точки в пространстве.....	9
1.2. Ориентация точки в пространстве .....	10
1.3. Представление ориентаций векторов .....	16
1.3.1. Фиксированные углы $X$ - $Y$ - $Z$ .....	16
1.3.2. Углы Эйлера $Z$ - $Y$ - $X$ .....	17
1.3.3. Углы Эйлера $Z$ - $Y$ - $Z$ .....	18
1.3.4. Эквивалентное представление «угол-ось».....	19
1.3.5. Параметры Эйлера .....	20
1.4. Описание системы отсчета .....	22
1.5. Параметры звеньев и сочленений манипулятора .....	23
Контрольные вопросы.....	25
<b>2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ</b> .....	27
2.1. Методика построения кинематической схемы манипулятора .....	28
2.2. Прямая задача кинематики .....	30
2.3. Обратная задача кинематики.....	31
2.4. Решения прямой и обратной задач кинематики на примерах.....	35
2.4.1. $3R$ -манипулятор.....	35
2.4.2. $RRP$ -манипулятор.....	38
2.4.3. $RPP$ -манипулятор.....	41
2.4.4. $RPR$ -манипулятор.....	44
2.4.5. $PRR$ -манипулятор.....	48
Контрольные вопросы.....	51

<b>3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ НА ЯЗЫКЕ PYTHON ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ .....</b>	<b>54</b>
3.1. Краткие сведения о языке программирования Python	54
3.2. Примеры программ решения прямой и обратной задач кинематики.....	56
Контрольные вопросы.....	60
<b>4. СПРАВОЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ .....</b>	<b>62</b>
4.1. Сферический способ описания положения точки .....	62
4.2. Цилиндрический способ описания положения точки.	63
4.3. Формулы, применяемые в решениях ОЗК .....	64
4.4. Вспомогательные сведения для решения ОЗК .....	65
4.5. Метод градиентного спуска.....	66
Контрольные вопросы.....	68
<b>5. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ .....</b>	<b>70</b>
5.1. Практическое задание №1. Реализация и визуализация оператора матрицы поворота на языке Python .....	70
5.2. Практическое задание №2. Привязка систем координат к узлам кинематической схемы манипулятора и составление таблицы параметров .....	71
5.3. Практическое задание №3. Решение прямой задачи кинематики.....	75
5.4. Практическое задание №4. Решение обратной задачи кинематики методом градиентного спуска.....	75
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>77</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....</b>	<b>78</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Кинематика рассматривает задачи, связанные с геометрическим движением тел в пространстве без учета сил, вызывающих это перемещение. Данным разделом механики изучаются положение, скорость, ускорение и высшие производные положения тел [1]. Под движением подразумевается механическое перемещение, происходящее с изменением положения тела относительно другого тела, с которым связана система отсчета (координат), во времени.

Изначально представление о движении ограничивалось равномерным движением (с постоянной скоростью), при этом скорость определялась через отношение пройденного пути ко времени, за которое данный путь был преодолен. Последующее развитие данной тематики связано с введением Галилео Галилеем понятия ускорения и дальнейшим обобщением Христианом Гюйгенсом криволинейного движения, что разделило ускорения на нормальное и касательное.

В XVIII веке кинематика получила большой толчок в своем развитии благодаря работе Леонарда Эйлера, заложившего основы кинематики твердого тела и разработавшего аналитические методы решения задач механики.

Во время первой промышленной революции кинематика выделилась в обособленный раздел, причем важным практическим применением была кинематика механизмов.

В настоящее время кинематика находит применение в системах технического зрения для оценки положения и ориентации, создании компьютерной анимации для визуализации правдоподобных движений, а также в областях, занимающихся разработкой автоматизированных технических систем, в том числе – робототехнике.

В робототехнике задействуются достижения из разных областей науки, поэтому один специалист не способен охватить все аспекты исследований и разработки робототехнических систем [1]. Среди данных компетенций есть такие, как проектирование механики манипуляторов, системы управления перемещения звеньев и искусственный интеллект, а также разработка алгоритмов машинного зрения.

Кинематика манипуляторов в качестве тел рассматривает их составные части, а также используемые ими детали, инструменты и другие объекты, находящиеся в окружающем робота пространстве.

В робототехнике при решении задач кинематики применяется векторно-матричный аппарат и соответствующие операции: умножение, вычисление обратной матрицы и так далее. Данный математический аппарат рассматривается в первом разделе данного пособия. За основу описания пространственных характеристик манипулятора взята декартова система координат, поскольку на их базе были разработаны многократно испытанные и широко используемые на практике методы, представленные в разделе 2. Поскольку настоящее учебно-методическое пособие носит в том числе прикладной характер – в третьем разделе рассматривается программная реализация для выполнения расчетов, связанных с решением задач кинематики манипуляторов.

## ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Манипулятор* – механизм, состоящий из последовательности соединенных сегментов, перемещающихся вращательно или поступательно друг относительно друга.

*Основание манипулятора* – неподвижный объект, к которому крепятся звенья робота. Как правило оно служит базовой системой отсчета.

*Звено манипулятора* – твердое тело, соединенное с одним или несколькими твердыми телами с помощью шарниров.

*Шарнир* – механический узел, соединяющий два твердых тела и обеспечивающий их ограниченное перемещение относительно друг друга.

*Рабочий орган* (схват, захват) – устройство, специально разработанное для закрепления на механическом интерфейсе с целью обеспечить выполнение задания роботом.

*Сочленения* – подвижные электромеханические системы, предназначенные для изменения положения или ориентации между двумя соседними звеньями.

*Система управления манипулятором* – совокупность аппаратных и программных компонентов, реализующих управляющую логику и силовые функции, а также другие функции, позволяющие контролировать и управлять поведением манипулятора, его взаимодействием и взаимосвязью с другими объектами и пользователями во внешней среде.

*Кинематическая схема манипулятора* – графическое отображение взаимосвязей звеньев, параметров робота и движений, осуществляемых сочленениями.

*Положение* – параметр, описывающий координаты материальной точки в рассматриваемой системе отсчета.

*Ориентация* – совокупность параметров, характеризующих наклоны тела в различных плоскостях рассматриваемого пространства.

*Локальная система координат* – система отсчета, связанная с телом и определяемая относительно других систем (например, система координат летательного аппарата относительно Земли, система координат на печатной плате для автоматизированного размещения компонентов).

*Подвижная система координат* – система отсчета, связанная с подвижным телом.

*Неподвижная система координат* – система отсчета, связанная с условно-неподвижным телом.

*Опорная система координат* – система отсчета, относительно которой определяются локальные системы. В рамках данного пособия может также использоваться как термин глобальная система.

*Степень свободы* – количество независимых переменных, которые необходимы для задания положения всех частей рассматриваемого механизма. Данный параметр влияет на возможность для одной и той же точки рабочего пространства принимать различные конфигурации звеньев и сочленений, однако увеличение этого числа приводит к росту сложности решения задач кинематики.

*Степень подвижности* – способность объектов перемещаться в одном независимом направлении.

*Рабочее пространство* – это часть пространства, в котором может находиться рабочий орган манипулятора.

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ

В данном разделе рассматривается базовый векторно-матричный аппарат, применяемый для составления математического описания манипуляторов, в качестве которого выступают положение и ориентация звеньев манипулятора, а также его рабочего органа.

Для определения положения и ориентации тела в пространстве рассматривается связанная с каждым подвижным телом локальная система отсчета. Системы такого типа, как правило, смещены относительно друг друга в пространстве, а их одноименные оси могут иметь отличное друг от друга направление. В рамках методики, представленной в данном пособии, положение и ориентация двух соседних звеньев могут быть найдены с помощью четырех ключевых параметров: длина звена, его угол скручивания и смещение, а также угол в сочленении. Таким образом, рассматривается совокупность локальных систем координат, положение и ориентация которых определяется относительно других локальных систем.

## 1.1. Положение материальной точки в пространстве

После построения системы отсчета положение любой точки по отношению к ней определяется с помощью координат. Для описания положения используется вектор, количество элементов которого зависит от количества осей системы отсчета. То есть, если система отсчета плоская, то размерность вектора равна  $2 \times 1$ , в случае трех осей –  $3 \times 1$ . Каждая компонента данного вектора обозначает его проекции на оси системы координат. При описании начала одной системы отсчета относительно другой данный вектор называется вектором сдвига или вектором смещения. Отметим, что при определении нескольких систем отсчета важно записывать соответствующий ей индекс вектора (например,  $A$ ):

$$P_A = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix},$$

где  $p_x$  – координата точки по оси  $X$ ,  $p_y$  – координата точки по оси  $Y$ ,  $p_z$  – координата точки по оси  $Z$ .

На рис. 1 приведена система координат с вектором, который характеризует положение точки.

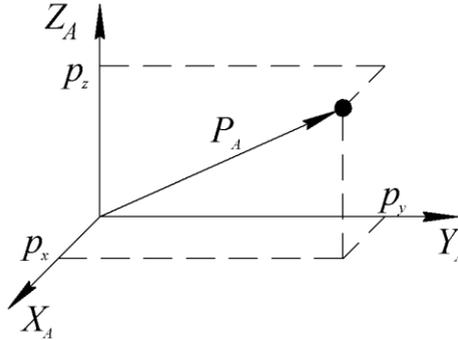


Рис. 1. Определение вектора  $P_A$  в системе координат

Также существует сферический и цилиндрический способ задания описания положения точки в системе отсчета (см. раздел 5).

В последующих разделах при описании одного из классических методов используется векторный способ задания положения точки, поскольку он лежит в основе метода, который рассматривается в разделах далее.

## 1.2. Ориентация точки в пространстве

Зачастую для решения рассматриваемых задач кинематики требуется описать ориентацию тела в пространстве.

Например, к точке  $A$  необходимо подвести схват манипулятора (рис. 2), при этом возникает вопрос – какая требуется ориентация, если звенья манипулятора можно расположить под разными углами относительно начала координат? Чтобы ответить на него, сперва следует ввести описание поворота связанной со звеном системы отсчета относительно опорной системы координат.

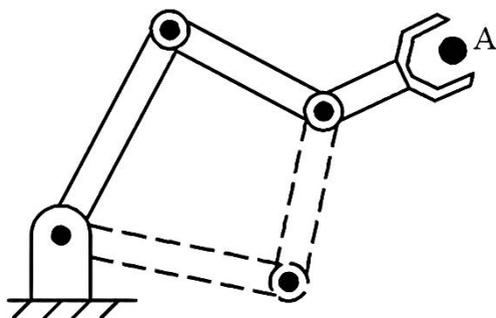


Рис. 2. Условное изображение манипулятора, перемещающегося по плоскости, с двумя вариантами ориентации звеньев

Рассмотрим поворот вектора  $P_A$  на угол  $\alpha$  относительно оси  $Y$  опорной системы отсчета  $A$  (двумерный случай, рис. 3). Система  $X_B Y_B$  проиллюстрирована для наглядности. Для описания поворота определена матрица вращения, которая в данном случае имеет следующий вид:

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \mp \sin(\alpha) \\ \pm \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

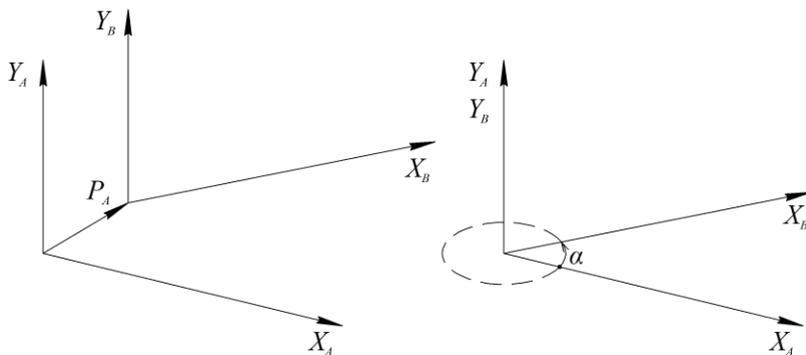


Рис. 3. Поворот системы координат  $B$  относительно оси  $Y$  системы  $A$

Компоненты матрицы вращения также называются направляющими косинусами [2].

Описание вектора  $P'_A$  после поворота относительно оси  $Y$  определяется через произведение матрицы поворота  $R$  на исходный вектор  $P_A$ :

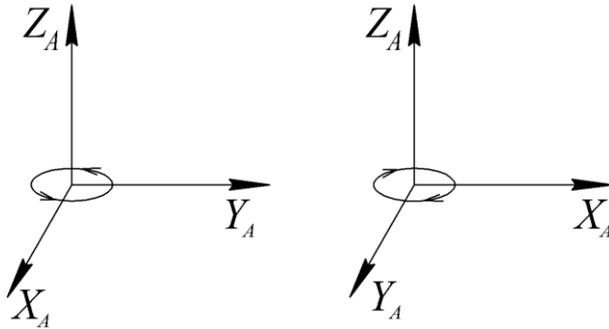
$$P'_A = R(\alpha) \times P_A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \mp \sin(\alpha) \\ \pm \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}.$$

В результате матричного умножения получаются новые координаты вектора:

$$\begin{aligned} p'_x &= p_x \cdot \cos(\alpha) \mp p_y \cdot \sin(\alpha), \\ p'_y &= \pm p_x \cdot \sin(\alpha) + p_y \cdot \cos(\alpha). \end{aligned}$$

При этом знак перед множителями с  $\sin(\alpha)$  будет определяться направлением вращения преобразуемого вектора (по часовой или против часовой стрелки), а также тем, является ли система отсчета правосторонней или левосторонней. Если система отсчета правосторонняя и осуществляется вращение против часовой стрелки, что является положительным направлением в данном случае, то выбираются верхние знаки. Положительным направлением для левосторонней системы считается движение по часовой стрелке, тогда выбираются нижние знаки. На рис. 4 показано положительное направление для правосторонней (рис. 4а) и левосторонней (рис. 4б) систем отсчета в трехмерном случае, когда вращение осуществляется относительно оси  $Z_A$ .

В случае поворота на угол  $\alpha$  в трехмерном пространстве определяется матрица поворота относительно каждой из осей опорной системы отсчета, а их произведение образует итоговую матрицу поворота вектора относительно опорной системы отсчета. При этом разная последовательность умножения матриц вращения, то есть последовательность поворотов относительно осей опорной системы, дает разные результаты. Данная особенность будет рассмотрена в подразделе 1.3.



а)б)

Рис. 4. Системы координат: а) правосторонняя;  
б) левосторонняя

Для описания поворота вектора в трехмерном пространстве вводится матрица поворота относительно каждой из осей –  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , а также углы поворота  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно (подразумевается, что рассматриваемая система является правосторонней) [1]:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Для вычисления координат точки после поворота необходимо умножить полученные матрицы (1–3) и вектор сдвига  $P_A$ :

$$P'_A = R_z(\gamma) \times R_y(\beta) \times R_x(\alpha) \times P_A.$$

При описании ориентации системы  $\{B\}$  относительно опорной системы  $\{A\}$  используется матрица поворота, имеющая

обозначение  $R_B^A$ , то есть в нижнем индексе обозначается описываемая система, а в верхнем – система, относительно которой описывается ориентация. Аналогично повороту вектора в трехмерном пространстве, также можно описать вращение системы отсчета  $\{B\}$  относительно опорной:

$$R_B^A = R_z(\gamma) \times R_y(\beta) \times R_x(\alpha).$$

Матрица вращения обладает важным свойством – ее транспонирование дает обратное описание ориентации, то есть описание ориентации опорной системы  $\{A\}$  относительно системы отсчета  $\{B\}$ :

$$R_B^{AT} = R_B^{A^{-1}} = R_A^B, (4)$$

Также эта запись означает, что при вычислении обратной матрицы можно получить ее транспонированный вид – это свойство матриц с ортогональными столбцами, то есть с такими столбцами, которые образуют прямоугольную систему координат.

Стоит отметить, что столбцы матрицы поворота  $R_B^A$  задают в опорной системе  $\{A\}$  координаты единичных векторов в направлениях осей системы  $\{B\}$ , что позволяет определить положение ее осей относительно опорной системы отсчета [1]. Таким образом, матрица поворота определяет положение осей повернутой системы отсчета относительно опорной.

Свойства матрицы поворота [3]:

1. Каждый столбец матрицы поворота представляет собой единичный вектор в направлении соответствующей оси повернутой системы отсчета, заданной относительно опорной системы координат. Каждая строка матрицы поворота представляет собой единичный вектор в направлении соответствующей оси опорной системы координат, заданной относительно повернутой системы отсчета:

$$R = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{bmatrix}.$$

2. Поскольку каждый столбец и строка представляют собой координаты единичного вектора, то длина векторов, соответствующих строкам и столбцам матрицы поворота, равна 1. Тогда определитель матрицы поворота равен 1 для правосторонней системы отсчета и -1 – для левосторонней.

3. Поскольку строки и столбцы матрицы поворота являются векторами, составляющими ортонормированный базис, то есть они образуют прямоугольную систему координат, то скалярное произведение двух различных строк или столбцов из матрицы вращения будет равно нулю. Например, матрица поворота относительно оси  $X$  на угол  $\alpha = 45^\circ$  выглядит следующим образом:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & -0.707 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}.$$

Тогда скалярное произведение второй и третьей строк будет определяться как:

$$0 \cdot 0 + 0.707 \cdot 0.707 - 0.707 \cdot 0.707 = 0.$$

Если произвести векторное умножение данных строк, то получится вектор;

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0.707 & -0.707 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{vmatrix} - j \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 0 & -0.707 \\ 0 & 0.707 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0.707 \\ 0 & 0.707 \end{vmatrix} = i \cdot 1.41 - j \cdot 0 + k \cdot 0,$$

координаты которого соответствуют вектору, направленному вдоль оси  $X$ . В трехмерном случае получается новый вектор, при этом он может не совпадать с направлением одной из осей (см. п. 2.3).

4. Результат транспонирования матрицы вращения равен ее обратной матрице (4).

### 1.3. Представление ориентаций векторов

Всего существует 24 способа представления ориентации тел и векторов в пространстве. Полный список матриц вращения для соответствующих представлений ориентаций приведен в [1]. Рассмотрим наиболее распространенные способы.

#### 1.3.1. Фиксированные углы X-Y-Z

Описанное выше представление ориентации в виде последовательности поворотов на углы  $\gamma$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  относительно осей опорной системы отсчета  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , соответственно, называется представлением с помощью фиксированных углов X-Y-Z. Каждый поворот осуществляется относительно одной из осей рассматриваемой фиксированной системы отсчета (рис. 5). Последовательное умножение матриц вращения относительно обозначенных осей будет выглядеть следующим образом:

$$R_{XYZ} = R_z(\alpha) \times R_y(\beta) \times R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

где  $r_{11} = \cos \alpha \cos \beta$ ,  $r_{12} = \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma$ ,  
 $r_{13} = \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma$ ,  $r_{21} = \sin \alpha \cos \beta$ ,  
 $r_{22} = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma$ ,  $r_{23} = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma$ ,  
 $r_{31} = -\sin \beta$ ,  $r_{32} = \cos \beta \sin \gamma$ ,  $r_{33} = \cos \beta \cos \gamma$ .

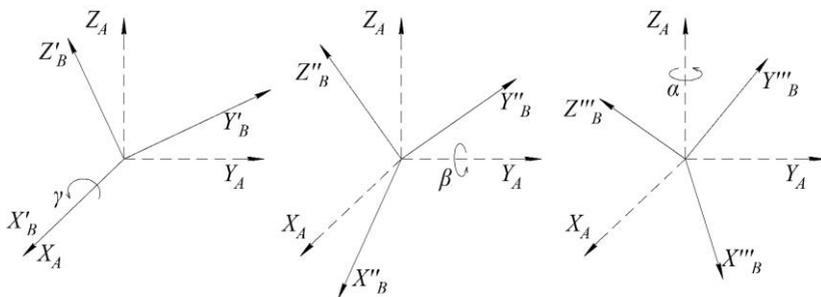


Рис. 5. Поворот на фиксированные углы X-Y-Z

При этом углы можно найти следующим формулам, исходя из полученной выше матрицы:

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{-r_{31}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}} \right),$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{r_{21} / \cos \beta}{r_{11} / \cos \beta} \right),$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{r_{32} / \cos \beta}{r_{33} / \cos \beta} \right),$$

где  $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ .

Также в случае вырожденного решения, то есть, когда  $\cos \beta = 0$ , возможно два случая вычисления углов, при этом для простоты расчетов принимается  $\alpha = 0$ :

1. Если  $\beta = 90^\circ$ , то  $\alpha = 0, \gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{r_{12}}{r_{22}} \right)$ .

2. Если  $\beta = -90^\circ$ , то  $\alpha = 0, \gamma = -\operatorname{arctg} \left( \frac{r_{12}}{r_{22}} \right)$ .

Использование в решениях арктангенса обусловлено тем, что с помощью данной функции можно явно определить квадрант в системе отсчета для исключения двойственности определения углов (например,  $45^\circ$  и  $-135^\circ$ , которые лежат в первом и третьем квадранте соответственно).

### 1.3.2. Углы Эйлера Z-Y-X

Данная последовательность основана на повороте относительно осей подвижной системы отсчета следующим образом: поворот системы на угол  $\alpha$  вокруг оси Z, затем уже повернутая система поворачивается на угол  $\beta$  вокруг оси Y, последний поворот данной системы осуществляется на угол  $\gamma$  вокруг оси X (рис. 6).

Главное отличие рассматриваемого представления заключается в том, что каждый поворот происходит вокруг одной из осей подвижной системы. Данная последовательность получила название углы Эйлера. Поскольку система является подвижной, то каждый поворот осуществляется относительно уже повернутой системы отсчета.

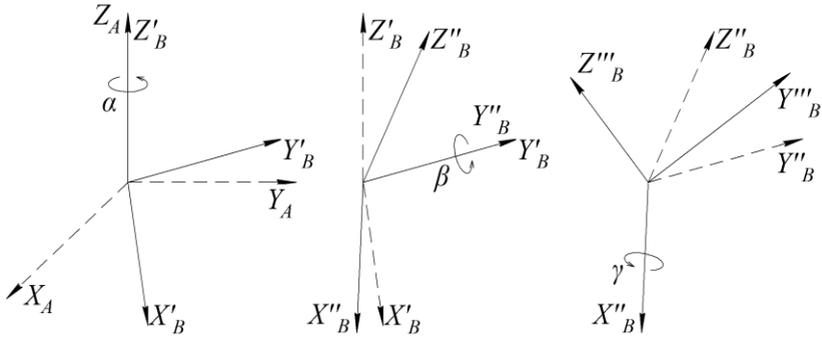


Рис. 6. Углы Эйлера Z-Y-Z

При этом матрица вращения системы полностью схожа с матрицей вращения в случае фиксированных углов X-Y-Z, что говорит об одинаковом результате поворота относительно неподвижных осей опорной системы и поворота вокруг осей подвижной системы.

### 1.3.3. Углы Эйлера Z-Y-Z

В данном случае осуществляется поворот относительно оси Z на угол  $\alpha$ , затем вокруг оси Y на угол  $\beta$  относительно повернутой системы, и завершается поворотом относительно оси Z' повернутой на предыдущем шаге системы на угол  $\gamma$ .

Компоненты итогового оператора вращения выглядят иначе:

$$R_{ZYX} = R_z(\alpha) \times R_y(\beta) \times R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

где  $r_{11} = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma$ ,  $r_{12} = -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma$ ,  $r_{13} = \cos \alpha \sin \beta$ ,  
 $r_{21} = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma$ ,  $r_{22} = -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma$ ,  $r_{23} = \sin \alpha \sin \beta$ ,  $r_{31} = -\sin \beta \cos \gamma$ ,  $r_{32} = \sin \beta \sin \gamma$ ,  
 $r_{33} = \cos \beta$ .

При условии  $\beta \neq 0$  углы рассчитываются по следующим формулам:

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}}{r_{33}} \right),$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{r_{23} / \sin \beta}{r_{13} / \sin \beta} \right),$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left( -\frac{r_{32} / \sin \beta}{r_{31} / \sin \beta} \right),$$

где  $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ .

При вырожденных случаях, когда  $\beta = 0^\circ$  и  $\beta = 180^\circ$  также существует два удобных решения за счет приравнивания угла  $\alpha$  к нулю:

- Если  $\beta = 0$ , то  $\alpha = 0, \gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{-r_{12}}{r_{11}} \right)$ ;
- Если  $\beta = 180^\circ$ , то  $\alpha = 0, \gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{r_{12}}{-r_{11}} \right)$ .

### 1.3.4. Эквивалентное представление «угол-ось»

Рассмотрим поворот вектора относительно произвольного направления или вектора – через выбор данного направления в качестве оси произвольной системы отсчета и угла поворота относительно этой оси можно получить любую ориентацию [1] (рис. 7). Сам поворот на желаемый угол осуществляется по правилу правой руки относительно выбранного направления (вектора)  $\mathbf{K}$ , которое также называют эквивалентной осью конечного вращения. Длина вектора  $\mathbf{K}$  берется равной 1 (единичный вектор). Для более компактного представления (3 на 1) ориентации данный вектор умножается на желаемый угол поворота.

Все положения данного представления являются следствием теоремы Эйлера о вращении.

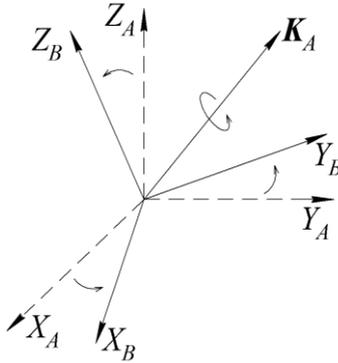


Рис. 7. Представление «угол-ось»

Вектор  $\mathbf{K}$  состоит из компонент, характеризующих его положение в исходной системе отсчета:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}.$$

Матрица поворота относительно произвольной оси поворота имеет следующий вид:

$$R_K = \begin{bmatrix} k_x k_x v + c & k_x k_y v - k_z s & k_x k_z v + k_y s \\ k_x k_y v + k_z s & k_y k_y v + c & k_y k_z v - k_x s \\ k_x k_z v - k_y s & k_y k_z v + k_x s & k_z k_z v + c \end{bmatrix},$$

где  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ ,  $v = 1 - \cos \theta$ .

### 1.3.5. Параметры Эйлера

Ориентацию векторов, точек и тел также можно представлять посредством четырех чисел, которые получили название параметров Эйлера.

Параметры Эйлера, выраженные через эквивалентную ось  $\mathbf{K} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$  и эквивалентный угол  $\theta$ , определяются следующим образом

$$\epsilon_1 = k_x \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\epsilon_2 = k_y \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\epsilon_3 = k_z \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\epsilon_4 = \cos \frac{\theta}{2}.$$

При этом всегда должно выполняться следующее равенство:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 = 1.$$

Данное равенство отражает то, что ориентацию можно визуализировать точкой на единичной гиперсфере четырехмерного пространства [1].

Кроме того, параметры Эйлера возможно записать в виде вектора размерности  $3 \times 1$  и скалярной величины. Если представить параметры в виде вектора  $4 \times 1$ , то получится единичный кватернион [4].

Матрица вращения, эквивалентная рассматриваемым параметрам, соответствует следующему выражению:

$$R_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 - 2\epsilon_2^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3\epsilon_4) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_4) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с приведенной матрицей вращения через ее элементы параметры Эйлера выражаются следующим образом:

$$\epsilon_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4\epsilon_4},$$

$$\epsilon_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4\epsilon_4},$$

$$\epsilon_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4\epsilon_4},$$

$$\epsilon_4 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}.$$

Однако у данного способа существует ограничение: если матрица вращения задает поворот на  $180^\circ$  относительно любой оси, то параметр  $\epsilon_4$  стремится к нулю. Все параметры  $\epsilon_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  принадлежат диапазону  $[-1; 1]$ .

#### 1.4. Описание системы отсчета

Описание положения и ориентации звена манипулятора осуществляется через описание положения и ориентации точки, привязанной к данному телу. Согласно [1], удобным представляется использование в качестве точки начала системы отсчета, привязанной к сочленению звена, поэтому далее будет применяться данный способ описания (рис. 8).

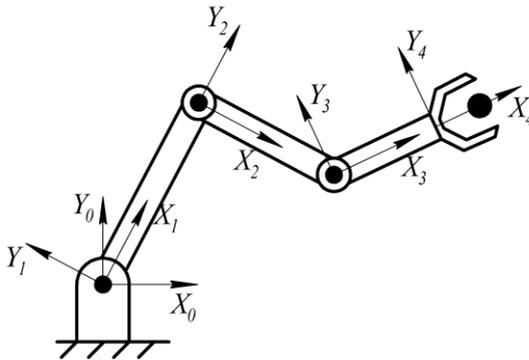


Рис. 8. Пример привязки систем отсчета к звеньям манипулятора

Стоит отметить, что система 4, связанная с кистью, выбрана произвольно, а система 1 совпадает с системой 0 при нулевых начальных условиях.

В рассматриваемых системах координат заданы матрица вращения и вектор сдвига, описывающий начало координат данной системы относительно другой. Например, система отсчета  $\{B\}$  описывается матрицей  $R_B^A$  и вектором  $P_B$  в системе координат  $\{A\}$ :

$$\{B\} = \{R_B^A, P_B\}.$$

При решении задач кинематики возникает необходимость выражения одной и той же величины в разных системах отсчета, что будет продемонстрировано в разделе 3.

### **1.5. Параметры звеньев и сочленений манипулятора**

Описание кинематики манипулятора подразумевает задание систем координат, привязанных к его звеньям, и выбор параметров, которые позволяют однозначно определять положение звеньев и конфигурацию манипулятора. Существует несколько методов описания кинематики таких механизмов, которые отличаются друг от друга правилами выбора осей локальных систем координат: представление Денавита-Хартенберга, метод последовательного формирования систем координат, метод привязки систем координат к центрам масс звеньев и другое. Обычно при решении задач кинематики используют представление Денавита-Хартенберга, которое позволяет получить положение рабочего органа или звена с помощью умножения матриц с размерностью  $4 \times 4$ , используя при этом 4 параметра [5].

При проектировании манипуляторов необходимо описывать свойства составляющих их звеньев: используемые материалы, прочность и жесткость звена, расположение и тип опорных элементов сочленений, форма звена, вес и так далее. Однако с точки зрения кинематики звено рассматривается как твердое тело, которое определяет, каким образом соотносятся между собой оси соседних сочленений. Осью сочленения является такая прямая, которая показывает, как в сочленении данное звено движется относительно предыдущего звена, при этом считается, что основание манипулятора – начало последовательности звеньев, а схват – конечное звено этой последовательности. При вращательном движении в сочленении ось будет направлена перпендикулярно направлению вращения, то есть вдоль вектора угловой скорости. Если в сочленении присутствует линейное перемещение звена, то ось будет направлена вдоль прямолинейной траектории движения. Далее рассматривается модификация метода Денавита-Хартенберга, изложенная в [1].

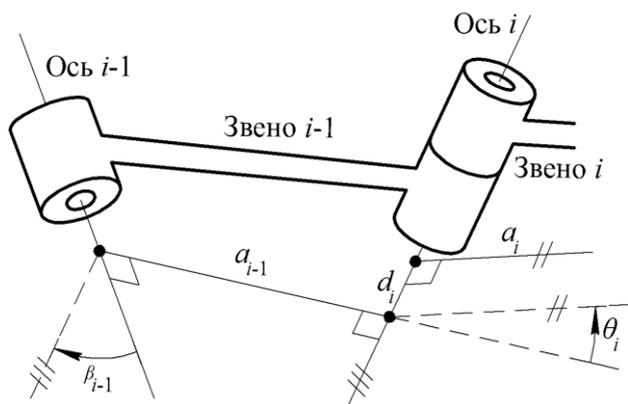


Рис. 9. Звенья и сочленения с параметрами Денавита-Хартенберга  $a_{i-1}$ ,  $\beta_{i-1}$ ,  $d_i$ ,  $\theta_i$

Между любыми двумя соседними осями в трехмерном пространстве существует определенное расстояние, которое можно получить вдоль прямой, перпендикулярной к ним. Данный перпендикуляр будет один, если между осями нет пересечения, или множество перпендикуляров одинаковой длины в случае параллельных осей. Этот перпендикуляр между соседними осями (рис. 9) называется длиной звена и обозначается  $a_i$ . Длина звена показывает кратчайшее расстояние между осями вращения или линейного перемещения. Кроме того, данный параметр может быть равен нулю в случае пересечения осей.

Вторым параметром является относительное положение осей – угол скручивания звена  $\beta_i$ . Он определяется следующим образом (рис. 9) – если для звена  $i-1$  представить плоскость, для которой его параметр длины является нормалью (перпендикуляром) к плоскости, то углом скручивания будет угол между проекциями осей  $i$  и  $i-1$  на эту плоскость, при этом рассматривается поворот от оси  $i-1$  к оси  $i$ . На рис. 9 показано, что данный угол определяется через параллельный перенос оси  $i$  в точку пересечения общего перпендикуляра и оси  $i-1$ . Если эти оси пересекаются, то угол скручивания будет измеряться в плоскости, которую образуют обе оси, при этом знак выбирается в соответствии с принятым положительным направлением (зависит от того, левосторонняя или правосторонняя система).

Длиной и углом скручивания звена определяется его описание. Для описания соединения между звеньями рассматриваются такие параметры, как смещение звена и угол в сочленении.

Соседние звенья  $i-1$  и  $i$  имеют одну общую ось сочленения [1]. Величины, которые характеризуют данное соединение – смещение звена  $d_i$  и угол в сочленении  $\theta_i$  (рис. 9). Первый параметр можно определить, как расстояние между звеньями вдоль их общей оси (перпендикуляра, если он существует). Угол в сочленении характеризует величину поворота звена  $i-1$  относительно звена  $i$  вокруг общей оси  $i$ .

На рис. 9 показано, что смещение звена  $d_i$  определяется как расстояние между точками пересечения длин звеньев  $a_{i-1}$  и  $a_i$  с осью  $i$ . Если в сочленении используется линейное перемещение, то данный параметр  $d_i$  будет не постоянным, а переменным. Угол в сочленении здесь определяется следующим образом: после пересечения с осью  $i$  продлевается длина звена  $a_{i-1}$ , с помощью параллельного переноса из этой же точки пересечения проводится длина звена  $a_i$ , затем угол в сочленении измеряется как угол между получившимися прямыми в соответствии с принятым положительным направлением – образуется угол от длины звена  $a_{i-1}$  к  $a_i$ . В случае вращательного сочленения данный параметр будет изменяться. Также следует знать, что оба рассмотренных параметра определяются относительно оси  $i$ , в отличие от длины звена и угла скручивания.

### Контрольные вопросы

1. Что содержит вектор сдвига?
  - а) Координаты скорости вдоль оси
  - б) Угол поворота по каждой оси
  - в) Координаты точки в базовой системе координат
  - г) Коэффициенты сдвига
2. Сколько элементов содержит вектор сдвига?
  - а) Два
  - б) Зависит от количества осей системы координат
  - в) Три
  - г) Зависит от количества координат

3. Чем отличаются правосторонняя и левосторонняя системы координат (кроме направлений некоторых осей)?
- Привязкой систем отсчета
  - Углом поворота
  - Принятыми ограничениями на вращение
  - Принятым положительным направлением вращения
4. Что описывает  $R_B^A$ ?
- Ориентацию системы В относительно А
  - Поворот вектора В к А
  - Скорости вращения от системы А к В
  - Поворот вектора А к В
5. Как возможно получить матрицу  $R_A^B$  из  $R_B^A$ ?
- Транспонированием  $R_B^A$
  - Умножением транспонированного вектора  $P_A^B$  на  $R_B^A$
  - Вычислением обратной матрицы  $R_B^A^{-1}$
6. Как влияет порядок произведения матриц поворота при вращении вектора с использованием углов Эйлера?
- Появляются смещения результирующего вектора
  - Порядок не влияет на результирующую ориентацию вектора
  - Получаются разные ориентации вектора
7. Как определить длину звена в соответствии с методом Денавита-Хартенберга?
- Определить длину перпендикуляра между осями X
  - Определить длину перпендикуляра между осями соседних сочленений
  - Производная от вектора сдвига между соседними сочленениями
  - Определить длину оси сочленения
8. Что обозначает угол скручивания звена?
- Поворот между осями X
  - Угол угловое смещение звена относительно опоры
  - Угол между двумя осями соседних сочленений
9. Дано вращательное сочленение  $i$ , какой параметр будет переменным?
- $d_{i-1}$
  - $a_{i+1}$
  - $\theta_i$
  - $d_i$

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ

Как было отмечено ранее, на сформированном множестве локальных систем отсчета рассматриваемого манипулятора задаются отношения между ними в виде положений и ориентаций. Кроме того, вводится опорная система отсчета, относительно которой будут задаваться данные параметры у других систем координат.

Системы управления манипуляторами в качестве входных данных принимают координаты целевой точки относительно опорной системы координат в рабочем пространстве робота, /в которую необходимо переместить рабочий орган для дальнейших действий. Это позволяет пользователю интуитивно задавать команды, не вникая в устройство и алгоритмы работы механизма. Опорная система принимается за неподвижную и остается таковой даже в тех случаях, если манипулятор не является стационарной электромеханической системой.

Для достижения рабочим органом манипулятора целевой точки с необходимой ориентацией необходимо знать параметры для каждого звена. С целью их получения решаются две основные задачи кинематики: обратная и прямая. Обе задачи связаны с координатами целевой точки, а также с углами и смещениями звеньев (обобщенными координатами). Главные отличия заключаются в том, что для прямой задачи входными данными являются углы и/или смещения, а для обратной – координаты целевой точки. В их названиях отражена суть задач: для решения прямой задачи достаточно применения обычного векторно-матричного аппарата и одного метода, в то время как обратная задача кинематики может быть решена разными методами, которые отличаются между собой по точности получаемого решения. При этом могут существовать такие конфигурации манипуляторов, при которых решения обратной задачи кинематики может и не существовать вовсе. Рассмотрим их подробнее.

## 2.1. Методика построения кинематической схемы манипулятора

Данный этап является необходимым для описания положения звена относительно других звеньев. Составление схемы начинается с привязки систем отсчета к звеньям.

Принято считать, что ось системы отсчета  $\{i\}$   $Z_i$  совпадает с осью  $i$ -го сочленения. Начало координат этой системы задают в точке пересечения общего перпендикуляра (длины звена  $a_i$ ) с осью  $i$  соответствующего сочленения. Ось  $X_i$  направляется вдоль общего перпендикуляра между осями  $i$  и  $i+1$ . Если перпендикуляр отсутствует, то есть оси  $Z_i$  и  $Z_{i+1}$  пересекаются ( $a_i = 0$ ), то ось  $X_i$  будет перпендикулярна плоскости, которую образуют оси  $Z_i$  и  $Z_{i+1}$ . Ось  $Y_i$  направляется по правилу правой руки, чтобы в результате привязки образовалась правосторонняя система координат – со стороны направления оси  $Z_i$  можно увидеть, что ось  $X_i$  вращается через прямой угол к оси  $Y_i$  против часовой стрелки, то есть в положительном направлении (как показано на рис. 4а).

Алгоритм привязки систем отсчета можно представить в виде последовательности из четырех шагов:

1. Ось  $Z_i$  направляется вдоль оси  $i$  в сторону положительного вращения или линейного перемещения.
2. Ось  $X_i$  должна быть перпендикулярна обеим осям –  $Z_i$  в рассматриваемой координатной системе и  $Z_{i+1}$  в последующей. Если данные оси пересекаются, то  $X_i$  должна быть перпендикулярна плоскости, которую образуют оси  $Z_i$  и  $Z_{i+1}$ .
3. Ось  $Y_i$  направляется в соответствии с правилом правой руки.
4. Осуществляется привязка системы отсчета  $\{0\}$  и  $\{1\}$  к сочленениям так, чтобы при нулевых значениях переменных параметров ( $d$  или  $\theta$ ) данные системы были совмещены друг с другом. Также желательно привязать систему отсчета  $\{n\}$ , где  $n$  – количество звеньев, таким образом, чтобы как можно больше параметров были равны нулю.

Параметры звеньев и сочленений записываются в виде таблицы, пример которой приведен ниже (табл. 1).

Таблица 1. Параметры звеньев манипулятора

$i$	$a_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1				
2				
...				
$n$				

Сведем определение параметров, описанных в таблице 1, к следующим правилам:

1.  $\beta_{i-1}$  – угол между осями  $Z_{i-1}$  и  $Z_i$ , измеряемый относительно оси  $X_{i-1}$ .
2.  $a_{i-1}$  – расстояние между осями  $Z_{i-1}$  и  $Z_i$ , измеряемое вдоль оси  $X_{i-1}$ .
3.  $d_i$  – расстояние между осями  $X_{i-1}$  и  $X_i$ , измеряемое вдоль оси  $Z_i$ .
4.  $\theta_i$  – угол между осями  $X_{i-1}$  и  $X_i$ , измеряемый относительно оси  $Z_i$ .

Для угловых параметров следует учитывать направление, по которому одна ось перемещается в сторону другой, то есть для правосторонней системы координат вращение против часовой стрелки означает, что получаемый угол будет положительным, по часовой стрелке – отрицательным.

На рис. 10а приведено условно-графическое обозначение вращательного сочленения, на рис. 10б – поступательного. Данные обозначения необходимы для создания кинематических схем проектируемых манипуляторов, что будет служить вспомогательным материалом для расчета кинематики.



Рис. 10. Условно-графическое изображение сочленения:  
а) вращательного; б) поступательного

На рисунке выше дополнительно могут использоваться стрелки для указания типа сочленения и положительного направления движения.

## 2.2. Прямая задача кинематики

Для решения прямой задачи кинематики (ПЗК) используются значения углов в сочленениях и матрицы преобразования (в ряде источников также используется термин «матрица перехода» [6]). Данные математические объекты состояются из матрицы вращения  $R$  и вектора сдвига  $P$  в виде:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & w \end{bmatrix},$$

где  $f_{1 \times 3}$  – преобразование перспективы (далее принято, что  $f_{1 \times 3} = [0, 0, 0]$ ), при котором исходные параллельные линии могут казаться стороннему наблюдателю пересекающимися в некоторой точке (точке схода);  $w$  – глобальный масштабирующий множитель (далее принято, что  $w = 1$ ).

С помощью матрицы преобразования можно описать ориентацию и положение двух систем координат, связанных с соседними звеньями манипулятора, а также ориентацию и положение конечного звена манипулятора относительно опорной системы  $\{x_0, y_0, z_0\}$ , что будет показано ниже. Полученные в таблице 1 значения подставляются в следующую матрицу преобразования:

$${}^{i-1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cdot \cos\beta_{i-1} & \cos\theta_i \cdot \cos\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} \cdot d_i \\ \sin\theta_i \cdot \sin\beta_{i-1} & \cos\theta_i \cdot \sin\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} \cdot d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрицей поворота является третий диагональный минор (срез 3 на 3 в левом верхнем углу), а вектор перемещения – первые три элемента четвертого столбца, каждый из которых соответствует координатам  $(x, y, z)$  системы отсчета относительно предыдущей  $(i-1)$ . Другими словами, если рассматривать последовательность систем отсчета, то матрица преобразования описывает ориентацию и положение текущей

системы относительно предыдущей. Также с помощью умножения вектора на матрицу преобразования получают его описание относительно другой системы отсчета. Данный способ получил название однородных преобразований.

Следующим шагом решения ПЗК после составления таблицы параметров (табл. 1) является определение в общем виде положения и ориентации последнего звена  $N$  относительно опорной системы  $\{0\}$ , для чего достаточно перемножить матрицы преобразования, как показано ниже:

$${}^0T_N = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot \dots \cdot {}^{N-1}T_N. \quad (6)$$

В результате перемножения матриц преобразования получаются уравнения в матрице  ${}^0T_N$ , с помощью которых путем подстановки известных параметров Денавита-Хартенберга определяются координаты звена  $N$ . Описание полученных координат соответствует вектору смещения  ${}^0P_N$  в результирующей матрице  ${}^0T_N$ .

### 2.3. Обратная задача кинематики

Обратная задача кинематики (ОЗК) заключается в том, что при известных значениях положения (координат) последнего звена манипулятора производятся вычисления для определения углов и/или смещений в каждом сочленении, при которых достигается данное положение в рабочем пространстве [7]. Для нахождения решения ОЗК необходимо, чтобы целевое (конечное) положение манипулятора находилось в его рабочем пространстве. Различают достижимое рабочее пространство и произвольно достижимое рабочее пространство [1]. Отличие состоит в том, что для манипулятора достижимое рабочее пространство подразумевает то пространство, в области которого он может находиться хотя бы с одной ориентацией, а произвольно достижимое пространство – несколько возможных ориентаций манипулятора.

Существует множество способов определения углов и смещений в сочленениях робота при решении ОЗК. Если обобщить, то их можно подразделить на аналитические (называемые классическими) и численные методы. В основе

первых лежат аналитические выражения или решение многочлена четвертой, или меньшей, степени. При этом аналитический метод может содержать алгебраический или геометрический подход к решению ОЗК. В зависимости от сложности кинематической схемы манипулятора получаемые уравнения могут приобрести нелинейный характер, ввиду чего затрудняется поиск их решения, а в некоторых случаях их невозможно получить [8]. В случае решения нелинейных уравнений зачастую прибегают к использованию численных методов решения, заключающихся в итерационных расчетах. Кроме того, в решении подобных задач также применяются методы машинного обучения [9].

Решение ОЗК следует применять к такому диапазону переменных, при котором сохраняется геометрия и не превышает рабочая область манипулятора [1]. Отметим, что необходимо учитывать ориентацию рабочего органа, а также помнить, что важными величинами являются  $d$  и  $\theta$ , которые могут быть искомыми в том случае, если они являются варьируемыми параметрами манипулятора.

Среди численных методов существуют следующие: генетический алгоритм, машинное обучение (в свою очередь подразделяющееся на отдельные методы), метод градиентного спуска, стохастические алгоритмы поиска. Далее рассматриваются классические методы, так как они являются простыми в реализации и широко применяются на данный момент.

Результатом решения ПЗК являются новые координаты и ориентация рабочего органа (конечного звена) манипулятора относительно опорной системы отсчета, выраженные в матрице преобразования  ${}^0T$ . Для решения данной задачи используются такие параметры, как длина звена  $a$ , угол скручивания  $\beta$ , смещение звеньев  $d$ , а также угол в сочленении  $\theta$ . Последние два параметра служат искомыми величинами при решении ОЗК, где в качестве входных данных выступают координаты рабочего органа манипулятора, а также длина звена  $a$  и угол скручивания  $\beta$ .

Матрица преобразования, получаемая при решении ПЗК, также может быть представлена в следующем виде:

$${}^0_N T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Данная матрица используется при решении ОЗК, где из составляющих ее уравнений выражаются искомые величины – смещения звеньев и углы в сочленениях манипулятора.

Первый путь решения ОЗК аналитическим методом – использование уравнений, расположенных на первых трех строках четвертого столбца матрицы (7):  $(p_1, p_2, p_3)^T$ . Данным уравнениям соответствуют выражения, содержащие искомые величины  $d$  и  $\theta$ . Полученные уравнения приравниваются к известным координатам рабочего органа (звена  $N$ ):

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (8)$$

и выражаются через них с использованием известных тригонометрических соотношений.

Второй путь решения ОЗК – приведение матрицы преобразования к виду, который позволит выразить искомые величины. Например, можно провести следующие преобразования:

$${}^0_1 T {}^1_N T = T_r,$$

где  ${}^1_N T = {}^1_2 T \cdot {}^2_3 T \cdot \dots \cdot {}^{N-1}_N T$ ,  $T_r$  – результирующая матрица, которая получается при подстановке известных после решения задачи смещений  $d$  и углов в сочленении  $\theta$ .

Затем обе части умножаются на  ${}^0_1 T = {}^0_1 T^{-1}$ :

$$E {}^1_N T = {}^0_1 T T_r,$$

где  $E$  – единичная матрица.

Учитывая, что  $E {}^1_N T = {}^1_N T$ , получим:

$${}^1_0 T T_r = {}^1_N T. \quad (9)$$

Матрица  $T_r$  равна матрице (7), элементы матрицы считаются неизвестными. Через произведение в левой части (9) выводятся уравнения матрицы, элементы которой приравниваются элементам матрицы  ${}^1_N T$ . Наконец, из полученных равенств возможно выразить искомые величины.

Третий путь решения ОЗК – представление манипулятора на плоскости в опорной системе координат. С помощью плоских фигур в виде треугольников изображаются конфигурации манипулятора с определенным положением и ориентацией звеньев, через которые находят выражения для расчета искомых величин. Так как для решения используются тригонометрические соотношения, могут получиться те же результаты, что и при использовании предыдущих способов.

Добиться алгебраического решения ОЗК можно за счет сведения уравнений к многочлену [1]. Например, если в уравнениях присутствует всего одна переменная  $\theta$ , то выполняют следующие замены:

$$u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

$$\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Таким образом, аналитический метод сводится к следующим шагам:

1. Определение параметров Денавита-Хартенберга.
2. Нахождение матриц преобразования (5) и результирующей матрицы (6), описывающей положение и ориентацию конечного звена  $N$  манипулятора относительно опорной системы отсчета.
3. Ввод новых координат конечного звена и подставление в уравнения матрицы преобразования  ${}^0_N T$  (7), откуда выражаются смещения звеньев  $d$  и углы в сочленениях  $\theta$ . В случае, если не выходит явно выразить искомые величины, то применяется другой метод.

В процессе решения ОЗК потребуется вычислять обратные тригонометрические функции:  $\operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{arccos}$  и  $\operatorname{arcsin}$ . Как

отмечено в [1], из-за данных функций проявляется множественность решений ОЗК, то есть в заданной точке рабочего пространства манипулятор может находиться с разными ориентациями отдельных звеньев (разные знаки углов в результате вычисления обратных тригонометрических функций). В таком случае возникнет необходимость выбора одного из решений, в чем соответственно способствует задание дополнительных ограничений, которые помогут определиться с возможным решением задачи. Стоит отметить, что на выбор решения может повлиять наличие препятствий, из-за чего в качестве входных данных также может потребоваться текущее положение манипулятора.

На количество решений ОЗК влияет количество сочленений манипулятора – число степеней свободы может быть равно или больше шести, что, как правило, называют, избыточностью и гиперизбыточностью соответственно [10]. Кроме того, на количество возможных решений ОЗК могут повлиять и параметры Денавита-Хартенберга (в зависимости от типа сочленения), а также ограничения на диапазон изменения  $d$  или  $\theta$ . Общее замечание следующее – чем больше параметров звеньев не равны нулю, тем больше получается решений ОЗК.

#### **2.4. Решения прямой и обратной задач кинематики на примерах**

Для обозначения типа манипулятора принято использовать последовательность символов P и R, либо числа, означающего количество сочленений, и символы. Символ P – сокращение от слова «prismatic» обозначает сочленение с линейным перемещением (переменный параметр – смещение звена), символ R – «revolute» обозначает вращательное сочленение (переменный параметр – угол в сочленении). Также принято, что последовательность комбинации символов P и R в порядке слева-направо соответствует порядку сочленений от основания до рабочего органа. Например, RRP означает, что у манипулятора первые два сочленения – вращательные, а третье – поступательное. Другой пример: 2R-манипулятор, в котором два вращательных сочленения. При этом отметим, что рассматриваемое обозначение не содержит информации об

ориентации сочленений, что обычно изображается на сопроводительных схемах манипуляторов.

Ниже рассматривается решение ПЗК и ОЗК трехзвенных манипуляторов с разными типами сочленений и их комбинациями.

### 2.4.1. 3Р-манипулятор

Рассматриваемый манипулятор имеет три степени свободы, его кинематическая схема представлена на рис. 11. Также на данном рисунке приведена привязка систем отсчета для составления таблицы параметров Денавита-Хартенберга (табл. 2).

Как видно из рис. 11, привязка систем координат в некоторых случаях может не совпадать с физическим расположением подвижных сочленений робота.

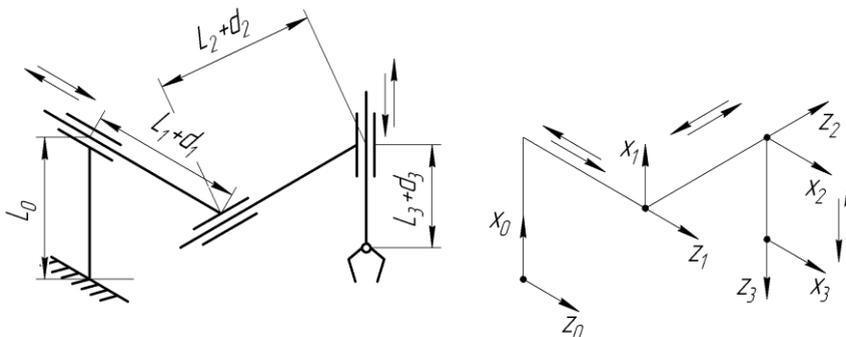


Рис. 11. Трехзвенный манипулятор с тремя степенями свободы, все сочленения которого совершают поступательное движение

Вышеописанная особенность отражается также и на значениях параметров звеньев, представленных в таблице 2.

Таблица 2. Параметры звеньев и поступательных сочленений манипулятора

$i$	$a_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	$L_0$	0	$L_1 + d_1$	0
2	0	$\pi/2$	$L_2 + d_2$	$\pi/2$
3	0	$-\pi/2$	$L_3 + d_3$	0

Матрицы преобразования находятся в соответствии с (5):

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_2 - d_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 + d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы завершить преобразования, необходимо перемножить полученные матрицы в соответствии с формулой (6):

$${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & L_0 - L_3 - d_3 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 - d_2 \\ 1 & 0 & 0 & L_1 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, через полученную матрицу решается ПЗК для данного манипулятора. Для решения ОЗК используется (8):

$$\begin{bmatrix} L_0 - L_3 - d_3 \\ -L_2 - d_2 \\ L_1 + d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Как видно по полученным уравнениям выше, искомые величины легко выражаются без использования тригонометрии:

$$\begin{cases} d_1 = z - L_1 \\ d_2 = -y - L_2 \\ d_3 = -x + L_0 - L_3 \end{cases}.$$

В рамках решения ОЗК теоретические результаты могут быть ограничены размерами рабочего пространства робота, а вычисляемые значения являются целевыми для регуляторов положения в каждом его сочленении.

### 2.4.2. RRP-манипулятор

Данный манипулятор имеет три степени свободы, его кинематическая схема и привязка систем отсчета для составления таблицы параметров Денавита-Хартенберга (табл. 3) представлена на рис. 12.

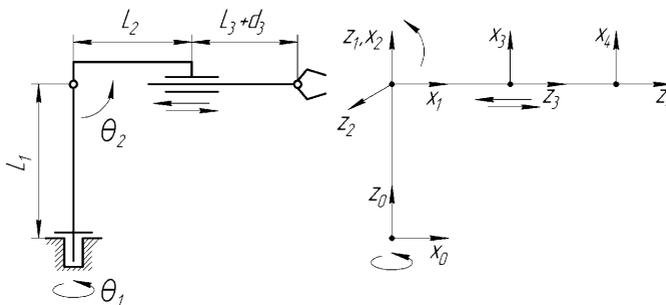


Рис. 12. Трехзвнный манипулятор с тремя степенями свободы, где два сочленения – вращательные, а третье – поступательное

Как показано на рисунке выше, разные оси двух соседних систем координат  $\{1\}$  и  $\{2\}$  могут совпадать, при этом угол скручивания звена – ненулевой, а смещение звена равно 0.

Таблица 3. Параметры звеньев и сочленений манипулятора

$i$	$a_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$L_1$	$\theta_1$
2	0	$\pi/2$	0	$\theta_2 + \pi/2$
3	0	$\pi/2$	$L_2$	0
4	0	0	$L_3 + d_3$	0

Матрицы преобразования, соответствующие данному манипулятору, представлены ниже:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее полученные матрицы перемножаются:

$${}^0_4T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta_1 & p_x \\ \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \sin \theta_1 & p_y \\ \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & -\cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $p_x = \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta_1 (L_2 + L_3 + d_3)$ ,  $p_y = \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \sin \theta_1 (L_2 + L_3 + d_3)$ ,  $p_z = L_1 - \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) (L_2 + L_3 + d_3)$ .

Для решения ОЗК с помощью (8) определяются выражения для переменных параметров:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta_1 (L_2 + L_3 + d_3) \\ \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \sin \theta_1 (L_2 + L_3 + d_3) \\ L_1 - \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) (L_2 + L_3 + d_3) \end{bmatrix}.$$

Затем из полученных уравнений выражается сумма длин звеньев и переменного параметра  $d_3$  из  $x$ :

$$(L_2 + L_3 + d_3) = \frac{x}{\sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta_1}.$$

Полученное равенство подставляется в уравнение  $y$  и выражается искомая величина  $\theta_1$ :

$$y = \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \sin \theta_1 \frac{x}{\sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta_1} = \operatorname{tg} \theta_1 \cdot x,$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Угол в сочленении  $\theta_2$  выражается из  $z$  путем подстановки выраженной ранее суммы длин звеньев и смещения звена  $d_3$ :

$$z = L_1 - \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{\sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta_1} = L_1 - \operatorname{ctg}\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{\cos \theta_1},$$

$$\operatorname{tg}\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{(L_1 - z) \cos \theta_1},$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{(L_1 - z) \cos \theta_1}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

При условии, что угол  $\theta_1$  будет рассчитан, можно найти  $\theta_2$ .

Смещение звена  $d_3$  определяется из ранее выведенного соотношения при условии, что остальные параметры известны:

$$d_3 = \frac{x}{\sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta_1} - L_2 - L_3 \quad (10)$$

ИЛИ

$$d_3 = \frac{y}{\sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \sin \theta_1} - L_2 - L_3. \quad (11)$$

Таким образом, было получено решение ОЗК для трехзвенного манипулятора с тремя степенями свободы, который включает в себя два вращательных сочленения и одно поступательное. Стоит отметить, что данное решение может существовать при  $d_3 > -L_3$  и  $-\pi/2 < \theta_2 < \pi/2$ . Формулы (10) и (11) нужны для того, чтобы избежать ситуации, когда происходит деление на ноль.

### 2.4.3. RPP-манипулятор

Рассматриваемый манипулятор (рис. 13) схож с предыдущим вариантом, за исключением второго сочленения, которое заменяется на поступательное. Отметим, что иногда оси опорной системы не обозначаются в случае совпадения с ними системы отсчета следующего сочленения. Соответствующие параметры манипулятора приведены в таблице 4.

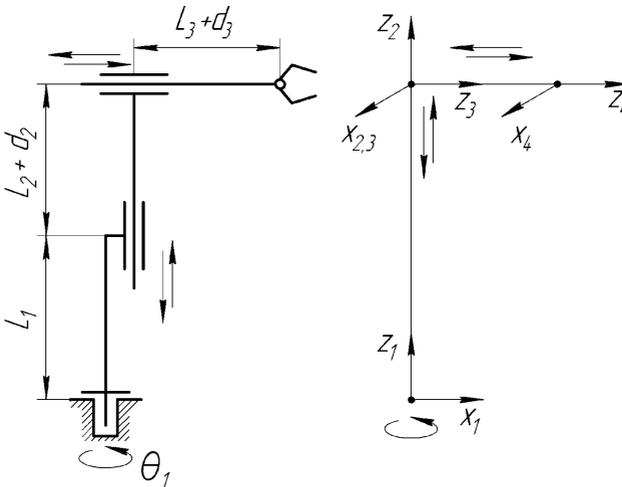


Рис. 13. Трехзвенный манипулятор с тремя степенями свободы, где первое – вращательное, а другие два – поступательные

Аналогично первому примеру, в данном случае также отсутствует привязка к физическому положению сочленения в манипуляторе. Поэтому смещение системы  $\{2\}$  равно сумме двух длин между сочленениями.

*Таблица 4. Параметры звеньев и поступательных сочленений манипулятора*

$i$	$a_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	0	$L_1 + L_2 + d_2$	$-\pi/2$
3	0	$-\pi/2$	$d_3$	0
4	0	0	$L_3$	0

Матрицы преобразования определены следующим образом:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + L_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Итоговая матрица:

$${}^0_4T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & \cos \theta_1 (L_3 + d_3) \\ -\cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & \sin \theta_1 (L_3 + d_3) \\ 0 & -1 & 0 & L_1 + L_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица позволит решить ПЗК, при этом для решения ОЗК потребуется выразить переменные параметры из четвертого столбца и первых трех строк данной матрицы. Полученные уравнения приведены ниже:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 (L_3 + d_3) \\ \sin \theta_1 (L_3 + d_3) \\ L_1 + L_2 + d_2 \end{bmatrix}.$$

Затем выражается сумма  $L_3 + d_3$  через  $x$  и подставляется во второе уравнение с  $y$ :

$$L_3 + d_3 = \frac{x}{\cos \theta_1},$$

$$y = \sin \theta_1 \frac{x}{\cos \theta_1} = x \operatorname{tg} \theta_1,$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) = \operatorname{arcctg} \left( \frac{x}{y} \right).$$

Смещение выражается через оставшиеся уравнения – смещение  $d_2$  получается через уравнение с  $z$ . Затем смещение  $d_3$  можно получить из предыдущих действий:

$$d_2 = z - L_1 - L_2,$$

$$d_3 = \frac{x}{\cos \theta_1} - L_3 \quad (12)$$

или

$$d_3 = \frac{y}{\sin \theta_1} - L_3. \quad (13)$$

Значение угла  $\theta_1$  влияет на выбор формулы для расчета смещения  $d_3$  – если  $-\pi/2 < \theta_1 < \pi/2$ , то используется формула (12), в противном случае – в формула (13).

#### 2.4.4. RPR-манипулятор

Кинематическая схема рассматриваемого механизма и привязка систем отсчета изображены на рис. 14. Соответствующие параметры манипулятора приведены в таблице 5.

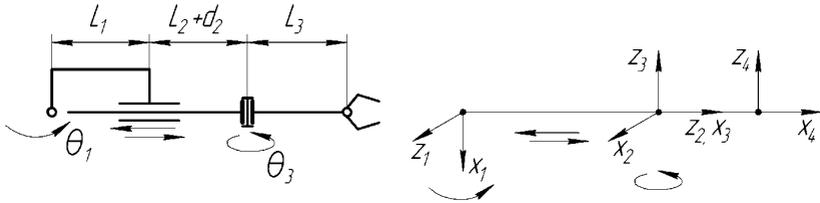


Рис. 14. Трехзвенный манипулятор с тремя степенями свободы, где первое и третье сочленения вращательные, второе – поступательное

Данный манипулятор не имеет основание-консоль, на котором установлены механизмы из примеров выше, поэтому опорная система  $\{0\}$  отличается от  $\{1\}$  лишь параметром угла в сочленении.

Таблица 5. Параметры звеньев и поступательных сочленений манипулятора

$i$	$a_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	$-\pi/2$	$L_1 + L_2 + d_2$	$-\pi/2$
3	0	$\pi/2$	0	$\theta_3 + \pi/2$
4	$L_3$	0	0	0

Для решения ПЗК необходимо определить матрицы преобразования:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + L_2 + d_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + \pi/2) & -\sin(\theta_3 + \pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_3 + \pi/2) & \cos(\theta_3 + \pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее находится произведение полученных матриц преобразования, при этом произведя замену  $\sin(\theta_3 + \pi/2) = \cos \theta_3$  и  $\cos(\theta_3 + \pi/2) = -\sin \theta_3$ :

$${}^0_4T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_3 & \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_3 & -\cos \theta_1 & p_x \\ \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 & p_y \\ -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $p_x = -\sin \theta_1 (L_1 + L_2 + d_2) - L_3 \cos \theta_3 \cdot \sin \theta_1$  ,  $p_y = \cos \theta_1 (L_1 + L_2 + d_2) + L_3 \cos \theta_3 \cdot \sin \theta_1$ ,  $p_z = -L_3 \sin \theta_3$ .

В соответствии с (8) определяются выражения для переменных параметров:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 (L_1 + L_2 + d_2) - L_3 \cos \theta_3 \cdot \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 (L_1 + L_2 + d_2) + L_3 \cos \theta_3 \cdot \cos \theta_1 \\ -L_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix}.$$

Затем выражается сумма длин звеньев и параметра смещения звена  $d_2$ :

$$L_1 + L_2 + d_2 = -\frac{x + L_3 \cos \theta_3 \cdot \sin \theta_1}{\sin \theta_1}.$$

Полученное равенство подставляется в выражение с  $y$ :

$$y = -\frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} (x + L_3 \cos \theta_3 \cdot \sin \theta_1) + L_3 \cos \theta_3 \cdot \cos \theta_1 = -\operatorname{ctg} \theta_1 x,$$

Тогда окончательно можно определить угол  $\theta_1$ :

$$\theta_1 = -\operatorname{arcctg} \left( \frac{y}{x} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{x}{y} \right).$$

Из уравнения с  $z$  определяется угол  $\theta_2$ :

$$\theta_3 = -\arcsin \left( \frac{z}{L_3} \right).$$

Применение функции  $\arcsin$  порождает двойственность решения, она не сможет позволить точно определить ориентацию. В таком случае следует выразить угол  $\theta_3$  через  $\operatorname{arctg}$ :

$$\sin(\theta_3) = -\frac{z}{L_3},$$

$$\cos(\theta_3) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_3)} = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{z}{L_3} \right)^2},$$

$$\theta_3 = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin(\theta_3)}{\cos(\theta_3)} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{-z}{\pm L_3 \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{z}{L_3} \right)^2}} \right).$$

Окончательно находится смещение звена  $d_2$ :

$$d_2 = \frac{y - L_3 \cos \theta_3 \cdot \cos \theta_1}{\cos \theta_1} - L_1 - L_2 \quad (14)$$

или

$$d_2 = -\frac{x + L_3 \cos \theta_3 \cdot \sin \theta_1}{\sin \theta_1} - L_1 - L_2 \quad (15)$$

Как можно увидеть, в определении  $d_2$  и  $\theta_3$  возможна неопределенность из-за знаменателя, который может принимать нулевое значение. Когда  $-\pi/2 < \theta_1 < \pi/2$ , то используется формула (14), в противном случае применяется формула (15).

### 2.4.5. PRR-манипулятор

Кинематическая схема манипулятора с двумя вращательными и одним поступательным сочленениями, а также привязка систем отсчета представлены на рис. 15.

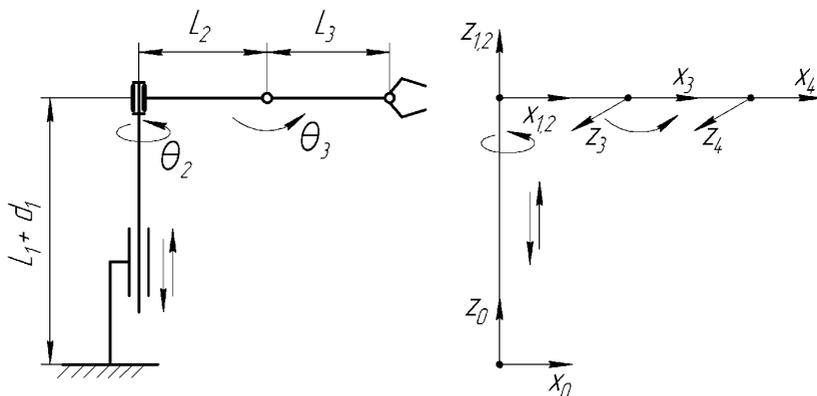


Рис. 15. Трехзвеноый манипулятор с тремя степенями свободы, где первое сочленение поступательное, второе и третье – вращательные

Соответствующие параметры Денавита-Хартенберга для данного манипулятора записаны в таблице 6.

Одним из физических ограничений данной кинематической схемы при реализации может быть основание, на котором устанавливается манипулятор. Таким образом, величина  $d_1$  не может быть по модулю меньше значения  $L_1$ , чтобы не происходило столкновения звена с основанием. Кроме того, в реальных системах звенья не могут бесконечно увеличивать свою длину, поэтому всегда существует определенное значение  $d_{\max}$ , больше которого смещение звена быть не может. Аналогично с углом в сочленении – могут быть физические ограничения на поворот звена, а также достижимые минимальные и максимальные значения углов.

Таблица 6. Параметры звеньев и поступательных сочленений манипулятора

$i$	$a_{i-1}$	$\beta_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$L_1 + d_1$	0
2	0	0	0	$\theta_2$
3	$L_2$	$\pi/2$	0	$\theta_3$
4	$L_3$	0	0	0

Матрицы преобразования для решения ПЗК:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Итоговая матрица преобразования получается следующей:

$${}^0_4T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 \cdot \sin \theta_3 & \sin \theta_2 & p_x \\ \cos \theta_3 \cdot \sin \theta_2 & -\sin \theta_2 \cdot \sin \theta_3 & -\cos \theta_2 & p_y \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где:

$$p_x = L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3, \\ p_y = L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3, p_z = L_1 + d_1 + L_3 \sin \theta_3.$$

В соответствии с (8) получаются следующие уравнения:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ L_1 + d_1 + L_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix}.$$

На следующем этапе решается ОЗК. Сначала выносятся общий множитель за скобку в первых двух уравнениях:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 (L_2 + L_3 \cos \theta_3) \\ \sin \theta_2 (L_2 + L_3 \cos \theta_3) \\ L_1 + d_1 + L_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix}.$$

Далее производится деление второго уравнения на первое:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} = \operatorname{tg} \theta_2.$$

Тогда угол в сочленении  $\theta_2$  находится по выражению ниже:

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) = \operatorname{arccctg} \left( \frac{x}{y} \right).$$

Из первых двух уравнений определяется угол  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = \arccos \left[ \frac{1}{L_3} \left( \frac{x}{\cos \theta_2} - L_2 \right) \right]$$

или

$$\theta_3 = \arccos \left[ \frac{1}{L_3} \left( \frac{y}{\sin \theta_2} - L_2 \right) \right].$$

Если выражать через  $\operatorname{arctg}$ :

$$\theta_3 = \operatorname{arctg} \left( \frac{\pm \sqrt{1 - \frac{1}{L_3^2} \left( \frac{x}{\cos \theta_2} - L_2 \right)^2}}{\frac{1}{L_3} \left( \frac{x}{\cos \theta_2} - L_2 \right)} \right) \quad (16)$$

или

$$\theta_3 = \operatorname{arctg} \left( \frac{\pm \sqrt{1 - \frac{1}{L_3^2} \left( \frac{y}{\sin \theta_2} - L_2 \right)^2}}{\frac{1}{L_3} \left( \frac{y}{\sin \theta_2} - L_2 \right)} \right) \quad (17)$$

Смещение звена  $d_1$  определяется из третьего уравнения:

$$d_1 = z - L_1 - \sin \theta_3.$$

На определение углов в сочленениях 2 и 3 при решении ОЗК, как можно увидеть, влияет знаменатель, где может возникнуть неопределенность в виде деления на ноль. Неопределенность результата избегается путем использования двух формул (16) и (17) в зависимости от наличия ноля в знаменателе: если  $-\pi/2 < \theta_2 < \pi/2$ , то используется формула (16), иначе используется формула (17).

### Контрольные вопросы

1. Относительно каких осей соседних сочленений определяется угол скручивания  $\beta$  согласно методу Денавита-Хартенберга?
  - а) Осей  $X_i$  и  $Z_{i+1}$
  - б) Осей  $Y_{i+1}$  и  $Z_i$
  - в) Осей  $Z$
  - г) Осей  $X$
2. Относительно каких осей определяется длина звена  $a$  в соответствии с методом Денавита-Хартенберга?
  - а)  $X_{i+1}$  и  $X_i$
  - б)  $Z_{i-1}$  и  $Z_i$
  - в) Между любыми осями соседних сочленений
  - г)  $X_i$  и  $Y_{i-1}$

3. Даны две системы отсчета с индексами  $i-1$  и  $i$ , начала которых совмещены. Чему равен параметр смещения звена  $d_i$ ?

- а) 0
- б)  $a_i$
- в)  $\text{tg}(\theta_i)$
- г) 1

4. Даны две системы отсчета с индексами 1 и 2. Ось  $Z_1$  направлена перпендикулярно плоскости страницы, а ось  $Z_2$  – вертикально. Чему равен параметр  $\theta_2$ ? Положение систем отсчета не имеет значения. Подсказка: используйте п.2 алгоритма привязки систем отсчета.

- а)  $180^\circ$
- б)  $90^\circ$
- в)  $0^\circ$
- г)  $-90^\circ$

5. Какой знак будет у угла  $\theta_2$  при рассмотрении правосторонних систем отсчета  $\{1\}$  и  $\{2\}$ , если ось  $X_2$  направлена горизонтально вправо относительно плоскости листа, а  $X_1$  – вертикально вверх? Положение систем отсчета не имеет значения.

- а) Минус
- б) Плюс
- в) Угол невозможно определить

6. Куда возможно направить ось  $X_3$ , если  $Z_2$  направлена горизонтально влево,  $Z_3$  – горизонтально вправо, при этом начало  $Z_3$  расположено выше начала  $Z_2$  на расстоянии 242 мм?

- а) Перпендикулярно плоскости листа, к нам
- б) Ось невозможно построить
- в) Вертикально вниз

7. Что возможно определить с помощью решения ПЗК?

- а) Координаты последней системы отсчета
- б) Углы в сочленениях
- в) Длины звеньев
- г) Углы скручивания

8. Дан двухзвенный манипулятор с сочленениями с линейным смещением. Какие входные параметры будут переменными при решении ПЗК? Принято, что параметры Денавита-Хартенберга уже определены.

- а) Углы в сочленениях  $\theta$
- б) Углы скручивания  $\beta$
- в) Смещение звеньев  $d$
- г) Координаты последней системы отсчета

9. Дан трехзвенный плоский манипулятор со вращательными сочленениями. Какая формула будет использоваться для вычисления координат конца первого звена манипулятора относительно базовой системы отсчета при произвольных углах в сочленениях?

- а)  ${}^0_1T$
- б)  ${}^0_2T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T$
- в)  ${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T$

10. Какие параметры являются искомым результатом при решении ОЗК (обобщенные параметры)?

- а) Координаты последнего звена относительно опорной системы отсчета
- б) Длины звеньев
- в) Скорости вращения звеньев
- г) Смещения звеньев и углы в сочленениях

11. Как возможно проверить правильность решения ОЗК?

- а) Решить ПЗК по известным координатам, затем углы и или/смещения использовать в решении ОЗК и сравнить полученный результат
- б) Продифференцировать уравнения ОЗК, выразив скорости, затем использовать желаемое время перемещения для вычисления длин звеньев, которые, наконец, сравниваются с заданными длинами звеньев
- в) Умножить матрицу вращения на вектор с координатами. Если все значения нового вектора равны 0, то решение ОЗК верное
- г) Решить ПЗК по известным углам и/или смещениям, затем полученные координаты использовать в решении ОЗК и сравнить полученный результат
- д) Невозможно проверить

### 3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ НА ЯЗЫКЕ PYTHON ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ

Язык Python является интерпретируемым языком с нестрогой типизацией. Это означает, что написанные инструкции преобразуются в набор инструкций другого языка прежде, чем быть скомпилированными, кроме того, объявление типа объектов в коде не является обязательным. Синтаксис языка обладает относительной простотой, ввиду чего он хорошо подходит для начинающих изучать программирование.

Рассматриваемый язык применяется для математического моделирования, обработки данных (аудио и видео, текст, числовые данные), создания приложений для операционных систем и веб-приложений, для машинного обучения, а также в системах управления техническими объектами.

Python активно развивается и дополняется новыми модулями, позволяющими улучшить пользовательский и исследовательский опыт. В данном разделе будут использоваться тригонометрические функции и матричные вычисления, которые реализуются посредством функций, представленные в модулях `numpy` и `math`.

Рассмотрим сведения по базовым компонентам данного языка.

#### 3.1. Краткие сведения о языке программирования Python

Типы данных:

1. Целое число (`int`).
2. Число с плавающей точкой (`float`) – десятичные дроби.
3. Булева переменная (`bool`).
4. Строки (`str`) – массив символов.
5. Список (`list`) – массив данных разного типа.
6. Кортеж (`tuple`) – список с неизменяемыми значениями.
7. Словарь (`dict`) – массив, элементами которого являются пары ключ-значение (ключом является как бы индекс значения, по нему в словаре происходит обращение к элементу).
8. Множество (`set`) – список с неповторяющимися элементами.

Отметим, что все объявляемые переменные являются объектами (в рамках объектно-ориентированного программирования), значит, у них есть свои методы.

То есть, например, создаем целое число и, например, вызовем метод определения количества единиц в этом числе (комментарии в коде обозначаются через #):

```
>>> var = 7 # объявление переменной
>>> var.bit_count() # вызов метода
3 # ответ
```

Условный оператор описывается следующим образом:

```
if _condition_1_: # _condition_1_ - условие 1
    # тело условия 1
elif _condition_2_: # _condition_2_ - условие 2
    # тело условия 2
else:
    # действия, если ни одно из условий не соблюдено
```

Ответвлений `elif` и `else` может не быть при необходимости. Также возможно описание условия в одну строку, например,

```
>>> result = 1 if True else 0
>>> print(result) # вывод в консоль результата
# результат: 1
```

Заметим, что тела условий, циклов, функций, методов и т.д. всегда пишутся с отступом в 4 пробела. Если уровней вложенности  $n$ , то, следовательно, строка кода должна быть сдвинута на  $4n$  пробелов.

Циклы: `for` и `while`. Первый цикл выполняется до тех пор, пока не закончатся элементы в списке, второй – пока истинно условие. Синтаксис данных циклов выглядит следующим образом:

```
# цикл for
for i in [1, 2, 3, 4]: # список в качестве примера
    # тело цикла
    print(i) # вывод элемента списка (пример)
```

```
# цикл while
i = 6
while i > 0:
    print(i) # вывод значения i
    i -= 1 # сокращение записи i = i - 1 (пример)
```

Функции объявляются через инструкцию def. Общий синтаксис выглядит так:

```
def func_name(arg_1, arg_2):
    # тело функции
```

где func\_name – имя функции, arg\_1 и arg\_2 – аргументы (входные параметры) функции. Аргументов функции может быть разное количество или они вовсе могут отсутствовать.

Например, объявим функцию определения того, что в строке не больше заданного общего количества символов:

```
def check_string_len(in_string, max_symbols):
    return True if len(in_string) <= max_symbols
else False
```

Больше сведений по языку Python рассмотрено в [11-13].

## **3.2. Примеры программ решения прямой и обратной задач кинематики**

Для преобразований углов из радиан в градусы и обратно используется функция, приведенная ниже в листинге 1.

Листинг 1:

```
import numpy as np
import math

def grad_to_rad(theta):
    for i, ang in enumerate(theta):
        theta[i] = ang * math.pi / 180
    return theta

def rad_to_grad(theta):
    for i, ang in enumerate(theta):
        theta[i] = ang * 180 / math.pi
```

```
return theta
```

Следующая функция (листинг 2) вычисляет матрицу преобразования, принимая на вход 4 параметра Денавита-Хартенберга.

Листинг 2:

```
def build_transformation_matrix(a, beta, d, theta):
    t_mtx = np.array([
        [math.cos(theta), -math.sin(theta), 0,
a],
        [math.sin(theta) * math.cos(beta),
math.cos(theta) * math.cos(beta), -math.sin(beta), -
math.sin(beta) * d],
        [math.sin(theta) * math.sin(beta),
math.cos(theta) * math.sin(beta), math.cos(beta),
math.cos(beta) * d],
        [0, 0, 0, 1]])
    return t_mtx
```

Функция `forward_kinematics`, представленная в листинге 3, позволяет решить прямую задачу кинематики, возвращая полученные в результате решения задачи координаты. Здесь же приведена функция `get_table`, которая возвращает списки параметров, сформированные в соответствии с представлением Денавита-Хартенберга.

Листинг 3:

```
def forward_kinematics(link_lengths, beta, thetas,
d):
    a_vec, beta_vec, d_vec, theta_vec =
get_table(link_lengths, beta, thetas, d)
    t_mtx = np.array([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0],
[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]])

    for i in range(0, len(a_vec)):
        t_mtx = np.dot(t_mtx,

build_transformation_matrix(a_vec[i],
beta_vec[i],
```

```

d_vec[i],

theta_vec[i]))
    return t_mtx[0][3], t_mtx[1][3], t_mtx[2][3]

def get_table(link_lengths, beta, thetas, d):
    a_vec = [0, 0, link_lengths[1],
link_lengths[2]]
    beta_vec = grad_to_rad(beta)
    d_vec = [link_lengths[0]+d, 0, 0, 0]
    theta_vec = grad_to_rad([0, thetas[0],
                                thetas[1], 0])
    return a_vec, beta_vec, d_vec, theta_vec

```

В листинге 4 приведена функция по решению обратной задачи кинематики для выбранного манипулятора.

Листинг 4.

```

def inverse_kinematics(coordinates, link_len):
    x_t, y_t, z_t = coordinates
    l_1, l_2, l_3 = link_len[0], link_len[1],
link_len[2]
    theta_2 = math.atan2(y_t, x_t)
    if (theta_2 < math.pi/2) and (theta_2 > -
math.pi/2):
        theta_3 = math.acos(1 / l_3 * ((x_t /
math.cos(theta_2)) - l_2))
    else:
        theta_3 = math.acos(1 / l_3 * ((y_t /
math.sin(theta_2)) - l_2))
    if z_t < l_1:
        theta_3 = - theta_3
    d_1 = z_t - l_1 - math.sin(theta_3)
    angles = [theta_2, theta_3]
    x = l_2 * math.cos(theta_2) +
l_3*math.cos(theta_2)*math.cos(theta_3)
    y = l_2 * math.sin(theta_2) +
l_3*math.sin(theta_2)*math.cos(theta_3)
    z = l_1 + d_1 + l_3 * math.sin(theta_3)
    return angles, (x, y, z), d_1

```

Листинг 5 (вывод полученных результатов для сравнения).

```
def print_results(coordinates, control_coordinates,
theta, angles, d_1, d):
    print('goal coordinates: ', coordinates)
    print('calculated coordinates: ',
control_coordinates)
    print('goal links shift: ', d_1)
    print('calculated links shift: ', d)
    print('goal angles: ', theta[0] * 180 /
math.pi, theta[1] * 180 / math.pi)
    print("calculated angles: ", angles[0] * 180 /
math.pi, angles[1] * 180 / math.pi)
```

Листинг 6 (трехмерное представление манипулятора с помощью отрезков).

```
def show_robot(link_lengths, beta, thetas, d):
    a_vec, beta_vec, d_vec, theta_vec =
get_table(link_lengths, rad_to_grad(beta),
rad_to_grad(thetas), d)
    t_01 = build_transformation_matrix(a_vec[0],
beta_vec[0], d_vec[0], theta_vec[0])
    t_02 = np.dot(t_01,
build_transformation_matrix(a_vec[1], beta_vec[1],
d_vec[1], theta_vec[1]))
    t_03 = np.dot(t_02,
build_transformation_matrix(a_vec[2], beta_vec[2],
d_vec[2], theta_vec[2]))
    t_04 = np.dot(t_03,
build_transformation_matrix(a_vec[3], beta_vec[3],
d_vec[3], theta_vec[3]))
    x_points = [0, t_01[0, 3], t_02[0, 3], t_03[0,
3], t_04[0, 3]]
    y_points = [0, t_01[1, 3], t_02[1, 3], t_03[1,
3], t_04[1, 3]]
    z_points = [0, t_01[2, 3], t_02[2, 3], t_03[2,
3], t_04[2, 3]]
    fig = plt.figure()
    ax = fig.gca(projection='3d')
    Axes3D.plot(ax, xs=x_points, ys=y_points,
zs=z_points)
    ax.set_xlabel('X')
    ax.set_ylabel('Y')
```

```

ax.set_zlabel('Z')
ax.scatter(x_points, y_points, z_points,
color='orange', marker='o')
plt.xlim(0, 2)
plt.ylim(0, 2)
ax.set_zlim(0, 3)
plt.show()

```

Основная программа (main.py) приведена в листинге 7.  
Листинг 7.

```

link_lengths = [1, 1, 1]
beta = [0, 0, 90, 0]
thetas = [0, 0]
d_1 = 0

coordinates = forward_kinematics(link_lengths,
beta, thetas, d_1)

angles, control_coordinates, d =
inverse_kinematics(coordinates, link_lengths)

print_results(coordinates, control_coordinates,
grad_to_rad(thetas), angles, d_1, d)

show_robot(link_lengths, beta, angles, d)

```

### Контрольные вопросы

1. Дан кортеж `cr = ('hello', 21, 'century')`. Чем завершится следующая строка: `cr[1] = '21st'`?

- а) Ошибка стека
- б) Вместо элемента 21 запишется строка '21st'
- в) Кортежи не поддерживают поэлементное присваивание, будет ошибка
- г) Невозможно вместо целого записать строку, будет ошибка

2. Как сделать так, чтобы функцию `show_robot` было возможно вызывать без аргументов?

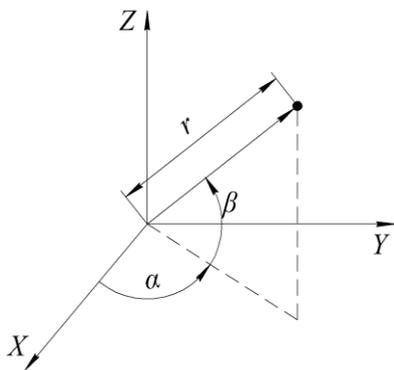
- а) При определении функции задать аргументам значения по умолчанию
- б) Это невозможно реализовать

- в) Дописать обработчик с условием по наличию или отсутствию аргументов
  - г) Использовать `try-except`
3. Как включить метод `numpy.zeros` без включения остальных функций пакета?
- а) Обратиться следующим образом: `numpy.clear(['e', 'zeros'])`
  - б) В преамбуле главного файла написать: `import numpy.zeros`
  - в) В преамбуле главного файла написать: `from numpy import zeros`
4. Можно ли расширить список, увеличив его длину?
- а) Да, используя функцию `append()`, передав туда список и добавляемое значение
  - б) Да, используя метод данного списка `append()`, где аргумент – добавляемое значение
  - в) Нет, однако возможно данный список преобразовать к кортежу и использовать его метод `add()`, передав в качестве аргумента добавляемое значение
  - г) Реализация невозможна, нельзя изменять длину списков
5. Как написать лямбда-функцию (анонимную функцию), возвращающую квадрат числа?
- а) `num_square = lambda x: x**2`
  - б) `num_square(lambda: x) {x*x}`
  - в) `lambda num_square(x): x^2`
  - г) `num_square = lambda x: x^2`
6. Как обратиться к двум последним элементам кортежа/списка, не зная и не вычисляя его длину?
- а) `obj[-2:]`
  - б) `obj[]`
  - в) `obj[-1:end]`
  - г) Без вычисления длины не обойтись
7. Будет ли ошибкой, если объявить переменную с ее типом, поставив тип перед именем?
- а) Да, тип переменной определяется автоматически
  - б) Нет, однако операция присваивания не будет совершена
  - в) Да, при условии, что присваивания нет

## 4. СПРАВОЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

### 4.1. Сферический способ описания положения точки

Как было отмечено в разделе 2, существует сферическое описание положения точки в пространстве. При этом используются три сферические координаты, определение которых представлено на рис. 16, где углы  $\alpha$  и  $\beta$  называются азимутом и восхождением луча, проецируемого в пространство, а третья координата  $r$  – это радиальное расстояние к описываемой точке вдоль данного луча.



*Рис. 16. Описание положения точки с помощью сферических координат в декартовой системе отсчета*

При этом координаты через величины  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $r$  выражаются следующим образом:

$$x = r \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha,$$

$$y = r \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha,$$

$$z = r \cdot \sin \beta.$$

Выражение сферических координат через декартовы:

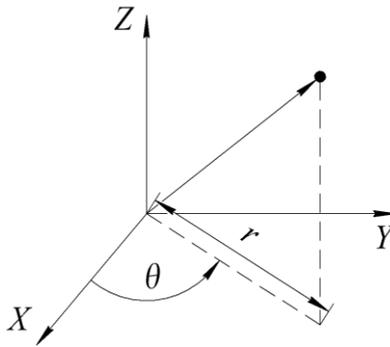
$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right),$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

#### 4.2. Цилиндрический способ описания положения точки

Положение точки в трехмерном пространстве можно также описать с помощью трех цилиндрических координат. Данные координаты продемонстрированы на рис. 17, где координата  $\theta$  задает направление в плоскости  $xу$ , вдоль которой по радиусу выполняется параллельный перенос на длину  $r$ , координата  $z$  задает высоту над плоскостью  $xу$ .



*Рис. 17. Описание положения точки с помощью цилиндрических координат в декартовой системе отсчета*

Декартовы координаты выражаются через цилиндрические следующим образом:

$$x = r \cdot \cos \theta,$$

$$y = r \cdot \sin \theta,$$

$$z = z.$$

При этом координаты цилиндрической системы отсчета выражаются через декартовы координаты выражениями ниже:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$z = z.$$

### 4.3. Формулы, применяемые в решениях ОЗК

#### 1. Основные тождества.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

#### 2. Формулы преобразования углов.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

#### 3. Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – стороны треугольника, лежащие, соответственно, напротив углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

#### 4. Теорема косинусов.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma,$$

где  $a$  лежит напротив стороны  $a$ ,  $\beta$  – напротив  $b$ ,  $\gamma$  – напротив  $c$ .

#### 4.4. Вспомогательные сведения для решения ОЗК

Уравнение вида  $\cos \theta = a$  имеет два корня:

$$\theta = \pm \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right),$$

а уравнение  $\sin \theta = b$  имеет следующие два корня:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{\pm \sqrt{1-b^2}} \right).$$

Когда дано оба уравнения выше, то корень определяется по следующему выражению:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{b} \right).$$

Уравнение вида  $a \cos \theta + b \sin \theta = 0$  имеет два способа нахождения корня:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{-b} \right),$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{-a}{b} \right).$$

Если правая часть отлична от нуля, например, равна  $c$ :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c,$$

то данное уравнение будет иметь следующие корни:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \right) \pm \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c} \right).$$

У системы уравнений следующего вида

$$a \cos \theta - b \sin \theta = c,$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = d,$$

будет всего один корень:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{ad-bc}{ac+bd} \right).$$

#### 4.5. Метод градиентного спуска

Это численный метод оптимизации. В рамках решения ОЗК данный метод заключается в поиске таких значений обобщенных координат, при которых положение манипулятора будет с заданной точностью соответствовать при решении ПЗК. Найденные значения должны удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} |x_c - x| < E_x \\ |y_c - y| < E_y, \\ |z_c - z| < E_z \end{cases} \quad (18)$$

где  $(x_c, y_c, z_c)$  – желаемые координаты положения системы отсчета, связанной с рабочим органом манипулятора,  
 $(x, y, z)$  – координаты той же системы отсчета, которые получаются в результате решения ПЗК при поиске обобщенных координат,  
 $(E_x, E_y, E_z)$  – допустимые значения ошибки, то есть разницы между желаемыми и расчетными координатами положения рабочего органа.

Критерий поиска оптимального решения в общем виде выглядит следующим образом:

$$I = \frac{1}{2} [(x_c - x(C))^2 + (y_c - y(C))^2 + (z_c - z(C))^2],$$

где  $C$  – вектор-столбец, включающий в себя обобщенные координаты. Данный вектор итерационно заполняется результатами решения ПЗК в процессе поиска минимума  $I$ .

Компоненты вектора  $C$  вычисляются по формуле (в матричной форме):

$$C_j = C_{j-1} - \gamma_C \frac{\partial I}{\partial C} = C_{j-1} - \gamma_C \left[ (x_j - x) \frac{\partial x}{\partial C} + (y_j - y) \frac{\partial y}{\partial C} + (z_j - z) \frac{\partial z}{\partial C} \right] \quad (19)$$

где  $j$  – номер итерации поиска решения ОЗК,  
 $\gamma_C$  – вектор коэффициентов, которые влияют на скорость и устойчивость вычислений.

Отметим, что вектор  $C_0$  обычно заполняется либо нулями, либо произвольными значениями от 0 до  $2\pi$ .

Рассмотрим пример.

Даны уравнения ПЗК:

$$\begin{cases} x = \cos \theta_1 (L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ y = \sin \theta_1 (L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ z = L_4 + L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{cases}$$

Принято, что  $E_x = E_y = E_z = 0,001$ ,  $\gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = \gamma_{\theta_3} = 0,01$ .

Для данной задачи  $C = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ .

Длины звеньев:  $L_1 = 0$  м,  $L_2 = 1$  м,  $L_3 = 3$  м,  $L_4 = 3$  м.

Для решения задачи необходимо и найти частную производную критерия  $I$  по каждой переменной  $\theta$ :

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -\sin \theta_1 (L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -\cos \theta_1 (L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_3} = -L_3 \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \cos \theta_1 (L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -\sin \theta_1 (L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_3} = -L_3 \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_2} = L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_3} = L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3).$$

Далее итерационно вычисляются значения обобщенных координат в соответствии с (19) и проверкой соблюдения неравенств (18).

Как правило, в реализациях данного метода используют конечное число итераций на случай, если решение не сходится (чтобы не образовался бесконечный цикл). Число итераций выбирают достаточно большим.

В результате поиска для координат (1; 1,2; 2) получился результат со следующими соответствующими отклонениями:  $(9,795 \cdot 10^{-4}; 9,095 \cdot 10^{-4}; 7,778 \cdot 10^{-4})$ . Все полученные значения отклонений меньше 0,001.

### Контрольные вопросы

1. Какая из представленных ниже функций позволяет определить координатную четверть точки?
  - а) Арккосинус
  - б) Арктангенс двух аргументов
  - в) Арккотангенс
  - г) Арктангенс
2. Выберите корректную последовательность шагов при управлении манипулятором со вращательными сочленениями (в упрощенной форме):
  - а) Получение координат желаемого положения – решение ОЗК – передача углов в систему управления
  - б) Получение желаемых углов – решение ОЗК – передача координат в систему управления
  - в) Получение координат желаемого положения – решение ПЗК – передача углов в систему управления
3. Дан трехзвенный плоский манипулятор со вращательными сочленениями. В каждом сочленении установлен датчик углового положения. Как найти координаты конца каждого звена данного манипулятора в опорной системе отсчета?
  - а) На основе углов и тригонометрических тождеств найти смещения звеньев, затем преобразовать их к опорной системе отсчета с помощью матрицы вращения
  - б) Измерить с помощью датчиков

в) Проинтегрировать показания датчиков за конечное время, вычислить среднее и умножить на скорость перемещения каждого звена

г) На основе известных длин звеньев и углов сочленений составить матрицы преобразования для конца каждого звена, в вычислениях используются значения углов с датчиков

4. Дана опорная система координат  $O$ , в ней описана точка  $A$ , соответствующая началу локальной системы координат. Также известна ориентация  $A$  относительно  $O$ . Выберите верные варианты получения ориентации  $O$  относительно  $A$ .

а)  ${}^A R = {}^O R^{-1}$

б)  ${}^A R = {}^O R - [{}^O P \ 0 \ 1]$

в)  ${}^A R = ({}^O T - {}^O P)^T$

г)  ${}^A R = {}^O R^T$

д)  ${}^A R = ({}^O T - {}^O P)^{-1}$

е)  ${}^A R = E - {}^O R$

## 5. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

В данном разделе приведено 4 практических задания, служащие для проверки и контроля освоения материалов, представленных в настоящем пособии.

### 5.1. Практическое задание №1.

#### Реализация и визуализация оператора матрицы поворота на языке Python

Цель работы: закрепление знаний о матричных операциях посредством библиотеки `numpy` на языке Python. Изучить трехмерную визуализацию с помощью библиотеки `Matplotlib`.

Исходные данные: Задан трехмерный вектор со следующими координатами  $(x, y, z)$  и углами поворота  $\alpha, \beta, \gamma$ , на которые поворачивается данный вектор относительно осей  $XYZ$ .

Таблица 7. Варианты заданий к практической работе №1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x, \text{ м}$	2,6	4,5	0,82	0,14	0	10	1,63	9,84	3,9
$y, \text{ м}$	3	0,12	3,3	7	1	5,16	0	2	3,9
$z, \text{ м}$	0	1	4	9,04	0	8,8	5,81	0,05	3,9
$\alpha, \text{ град}$	150	51	18	5	54	0	320	70	135
$\beta, \text{ град}$	68	0	290	45	10	180	301	120	260
$\gamma, \text{ град}$	6	97	44	90	0	203	56	2	0

Вариант	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x, \text{ м}$	0	1,1	0	1	4,2	0,73	1,41	0,7	5,9
$y, \text{ м}$	0	0,17	0,19	0	7,15	1,06	2,71	4	5
$z, \text{ м}$	1	4	3	0	1,94	7,28	3,14	0,5	2,9
$\alpha, \text{ град}$	34	281	65	0	231	89	34	48	0
$\beta, \text{ град}$	171	21	9	316	94	0	70	250	3
$\gamma, \text{ град}$	96	11	315	200	126	2	100	17	205

Порядок выполнения работы:

1. Написать 3 функции, осуществляющие поворот трехмерного вектора относительно каждой из трех осей декартового пространства.
2. Применить эти функции к заданному вектору в разных последовательностях (см. методические указания, раздел

2.3 «Представление ориентаций»). Можно также произвести поворот в произвольном порядке.

3. Сохранить получившиеся изображения с исходным вектором и новым вектором, получившимся в результате поворота и его новые координаты.

Примечания: Общий вид формулы для поворота вектора  $P$ :  $P_{new} = R \times P$ . Матрица  $R$  получается в результате последовательного умножения матриц поворота относительно каждой из осей прямоугольной системы координат.

## 5.2. Практическое задание №2.

### Привязка систем координат к узлам кинематической схемы манипулятора и составление таблицы параметров

Цель работы: освоение методики привязки систем отсчета к узлам кинематической схемы на примере трехзвенного манипулятора.

Исходные данные для кинематических схем на рис. 18–23 приведены в таблице 8.

Таблица 8. Исходные данные вариантов для практического задания №2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Схема	1			2			3		
$L_1$	0,4	0,11	0,2	0,1	0,19	0,3	0,8	0,5	0,63
$L_2$	0,2	0,4	1,4	0,45	0,1	0,2	0,34	0,12	0,35
$L_3$	0,11	0,34	0,4	0,2	0,45	0,41	0,23	0,15	0,26
$L_4$	-	-	-	0,13	0,07	0,2	-	-	-

Вариант	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Схема	4			5			6		
$L_1$	0,6	0,42	0,31	0,7	0,5	0,37	0,38	0,46	0,51
$L_2$	0,55	0,34	0,31	0,08	0,14	0,1	0,29	0,37	0,24
$L_3$	0,26	0,11	0,2	0,12	0,14	0,23	0,04	0,13	0,03
$L_4$	-	-	-	0,05	0,1	0,06	-	-	-

Порядок выполнения работы:

1. Осуществить привязку систем отсчета к звеньям манипулятора, обозначить известные величины и длины

звеньев, обозначить переменных величин (смещения звена и/или угла в сочленении).

2. Составить таблицу с параметрами Денавита-Хартенберга.

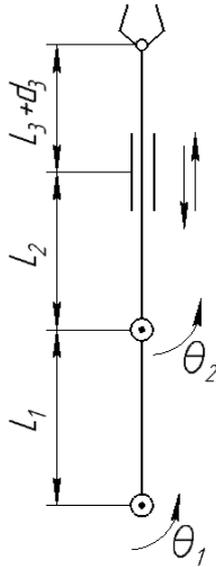


Рис. 18. Вариант №1 кинематической схемы трехзвеного манипулятора

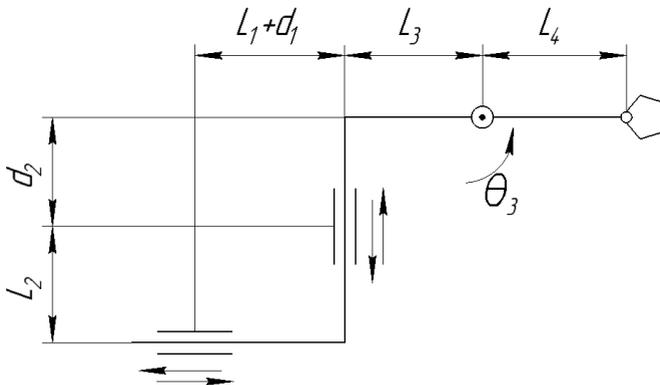


Рис. 19. Вариант №2 кинематической схемы трехзвеного манипулятора

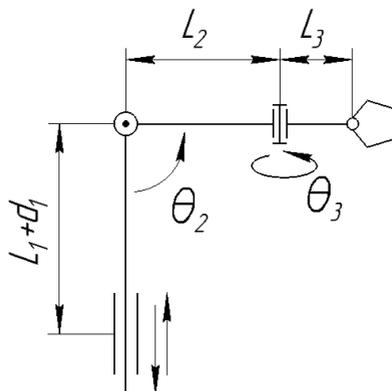


Рис. 20. Вариант №3 кинематической схемы трехзвенного манипулятора

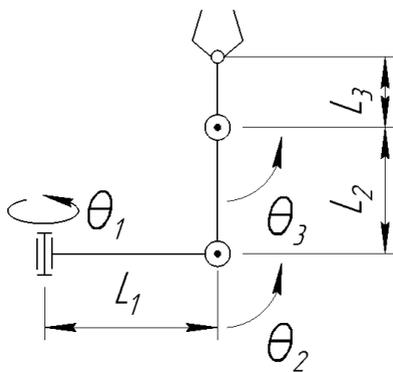


Рис. 21. Вариант №4 кинематической схемы трехзвенного манипулятора

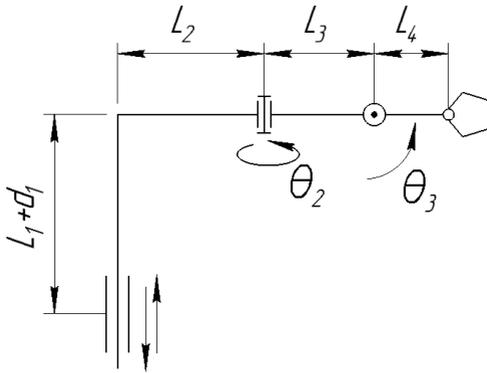


Рис. 22. Вариант №5 кинематической схемы трехзвенного манипулятора

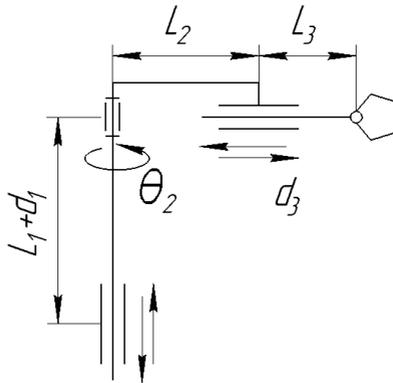


Рис. 23. Вариант №6 кинематической схемы трехзвенного манипулятора

### 5.3. Практическое задание №3. Решение прямой задачи кинематики

Цель работы: закрепление изученной методики и способов решения ПЗК для трехзвенного манипулятора.

Исходные данные принять из задания №2.

Порядок выполнения работы:

1. Исходя из таблицы параметров Денавита-Хартенберга, составить матрицы преобразования.
2. Получить аналитическое выражение для общей матрицы преобразования (можно пользоваться символьными вычислениями посредством пакетов прикладных программ).
3. Написать программу по решению ПЗК на языке Python.
4. Для проверки в качестве исходных данных подать в программу различные значения углов в сочленении и/или смещений звена, вывести полученные координаты в консоль. Для углов удобно будет использовать значения, кратные  $\pi/2$ .

Рекомендация: одним из простых способов определения корректности привязки систем отсчета является проверка вектора смещения, входящего в матрицу преобразования – он должен указывать положение системы отсчета  $i+1$  в системе  $i$ .

### 5.4. Практическое задание №4. Решение обратной задачи кинематики методом градиентного спуска

Цель работы: освоение метода градиентного спуска для решения обратной задачи кинематики.

Варианты принять из практического задания №2.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить метод градиентного спуска из кратких сведений, представленных ниже (раздел 4.5).
2. Из аналитической формы записи матрицы преобразования выразить обобщенные координаты.
3. Написать программу на языке Python для вычисления обобщенных координат. В случае, если решение ОЗК не

удается получить аналитически, использовать метод градиентного спуска.

4. Подать на вход программе значения, полученные по результатам практического задания №3.
5. Сравнить полученные результаты при разных значениях точности вычислений метода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в учебном пособии материалы позволяют изучить базовый математический аппарат, применяемый для описания положения и ориентации конструктивных узлов манипулятора в пространстве, а также для решения прямой и обратной задач кинематики. Решение задач такого типа позволит замкнуть обратную связь по положению и ориентации рабочего органа робота, что в свою очередь даст возможность системе управления манипулятора регулировать данные параметры. Кроме того, приведенный материал позволит выполнить этапы, необходимые для синтеза системы управления манипулятором, так как он содержит пример реализации решения рассмотренных в пособии задач на языке программирования Python в обобщенной форме для того, чтобы было возможно без значительных изменений применить данное решение к манипуляторам с различным числом степеней свободы и такими варьируемыми параметрами, как длины звеньев и угол скручивания звена. Помимо промышленной робототехники, рассмотренный математический аппарат также используется, например, в компьютерной графике и в разработке алгоритмов движения цифровых объектов в компьютерных симуляциях.

Кроме того, в настоящем пособии рассмотрен ряд примеров решения задач кинематики трехзвенных манипуляторов с различными конфигурациями сочленений, что позволит обучающимся усвоить последовательность решения данных задач, а также ознакомиться с некоторыми особенностями применения методов решения обратной задачи кинематики. Рассмотренный спектр задач является неотъемлемой частью процесса проектирования замкнутых и разомкнутых систем управления роботами. При этом стоит напомнить, что рассмотренные способы и методы решения не являются единственными, в данном пособии упомянуты некоторые альтернативные варианты и в качестве рекомендации даны ссылки для того, чтобы учащийся по желанию изучил область более углубленно.

Полученные знания позволят учащимся освоить такие дисциплины, как теория автоматического управления, теоретическая и прикладная механика, теория электропривода, информатика и проектирование робототехнических систем.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Крейг Д.Д. Введение в робототехнику. Механика и управление // М.: Изд-во Институт Компьютерных исследований. – 2013.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т 1. Статика и кинематика: учебник для студентов высших технических учебных заведений. – 2021. <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/ek21-32>.
3. Е.С. Шаньгин. Управление роботами и робототехническими системами. Конспект лекций. Уфа-2005. 2005 // URL: <https://scicenter.online/avtomatizatsiya-knigi-scicenter/upravlenie-robotami-robototekhnicheskimi.html>.
4. Гордеев В.Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. – 2016.
5. Denavit J., Hartenberg R.S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. – 1955. <https://doi.org/10.1115/1.4011045>.
6. Павельева Е.Б., Томашпольский В.Я. Линейная алгебра // Москва. – 2010. – С. 11.
7. Смирнов П.А., Яковлев Р.Н. Решение прямой и обратной задач кинематики в системе позиционирования звеньев манипулятора // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20. – №. 12. – С. 732–739. <https://doi.org/10.17587/mau.20.732-739>.
8. Яковлев Р.Н., Ватаманюк И.В., Сивченко О.Ю. Метод итеративного решения ОЗК с использованием алгебры кватернионов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – №. 10. – С. 419–429.
9. Ерашов А.А., Блинов Д.В., Савельев А.И. Анализ методов решения обратной задачи кинематики модульных реконфигурируемых систем. – 2021. <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2021.35.4.025>.
10. Chirikjian G.S., Burdick J.W. A hyper-redundant manipulator // IEEE Robotics & Automation Magazine. – 1994. – Т. 1. – №. 4. – С. 22-29. <https://doi.org/10.1109/100.388263>.
11. Лутц М. Программирование на Python, том I, 5-е издание // Пер. с англ.–СПб.: Вильямс. – 2020.
12. Лутц М. Программирование на Python, том II, 5-е издание // Пер. с англ.–СПб.: Вильямс. – 2020.

13. Основы программирования на языке Python: метод. пособие // А. И. Савельев, И. В. Ватаманюк, Н. А. Павлюк, С. В. Кулешов, А. А. Зайцева, А. Ю. Аксенов – СПб.: ГУАП, 2019. – 41 с.
14. ГОСТ Р 60.0.0.4-2023 // Роботы и робототехнические устройства: Термины и определения, Москва, 2023.

Издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение  
науки «Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр  
Российской академии наук» (СПб ФИЦ РАН)

**Савельев** Антон Игоревич  
**Ерашов** Алексей Алексеевич  
**Черских** Екатерина Олеговна  
**Шмаков** Олег Александрович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ  
ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ**

Учебно-методическое пособие

ISBN 978-5-6052274-3-4



9 785605 227434 >

---

Подписано к печати 20.05.2025. Формат 60x84 1/16.  
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 2,9. Тираж 250 экз. Заказ № 1197

---

Отпечатано с оригинал-макета СПб ФИЦ РАН  
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д. 39  
в ООО «ИПЦ «Измайловский»,  
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., д. 18-д